ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS III.

1927

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA LITTERARUM AC SCIENTIARUM

REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS III.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

III. KÖTET.

1927.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

ACTA
LITTERARUM AC SCIENTIARUM
REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS III.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

III. KÖTET.

1927.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

Kossuth Nyomda

INDEX — TARTALOM.

Tomus III. — 1927 — III. Kötet.

BIBLIOGRAPHIE.

Die quadratischen Reste zusammengesetzter Moduln.

Von Gustav Rados in Budapest.

Die quadratischen Reste in Bezug auf den Primzahl-Modul p sind unmittelbar durch die Zahlen

$$1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

gegeben und ihre Anzahl stimmt bekanntlich mit derjenigen der quadratischen Nichtreste überein.

Ist n ein zusammengesetzter Modul und seine Zerlegung in Primfaktoren

$$n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \qquad (\alpha \geqq 0);$$

können auch für diesen Modul die quadratischen Reste vermittels einer Formel berechnet werden? Wie gross ist ihre Anzahl? Für welche zusammengesetzten Moduln stimmt wiederum die Anzahl der quadratischen Reste und Nichtreste überein?

Diese Fragen sollen im Nachfolgenden beantwortet werden. Sie werden durch die folgenden Sätze erledigt:

a) *Die quadratischen Reste sowie auch die Nichtreste eines zusammengesetzten Moduls können stets durch je eine Formel berechnet werden.*

b) *Die Anzahl dieser Reste ist*

$$M = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

die der Nichtreste

$$N = \varphi(n)\left(1 - \frac{1}{\psi(n)}\right)$$

wobei $\varphi(n)$, die bekannte Eulerische Funktion, die Anzahl der

Glieder des reduzierten Restesystems für den Modul n —, $\psi(n)$ die Anzahl der verschiedenen Wurzeln einer auflösbaren Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{n}$$

bedeutet. (Bekanntlich ist $\psi(n)$ von der Wahl des quadratischen Restes D unabhängig.)

c) *Die Anzahl der quadratischen Reste und Nichtreste von n stimmt dann und nur dann überein, wenn n eine den Typen*

$$n = p^\alpha, 2p^\alpha, 4$$

angehörende zusammengesetzte Zahl ist, wobei p als ungerade Primzahl angenommen wird.

Der Beweis der Sätze *a)* und *b)* soll für die — alle Möglichkeiten erschöpfenden Fälle einzeln geliefert werden:

I. Fall: $\alpha = 0, 1$; hier ist $\psi(n) = 2^r$

II. Fall: $\alpha = 2$; hier ist $\psi(n) = 2^{r+1}$

III. Fall: $\alpha > 2$; alsdann ist $\psi(n) = 2^{r+2}$.

I. In diesem Falle ist n ungerade oder durch 2 teilbar und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{n}$$

sind die folgenden:

$$\left(\frac{D}{p_i}\right) = 1. \qquad (\mathrm{F}_1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

Diese Bedingungen sind also auch notwendig und hinreichend dafür, dass D quadratischer Rest von n sei.

Die quadratischen Reste von p_i sind die Zahlen

$$1^2, 2^2, \ldots, k_i^2, \ldots, \left(\frac{p_i - 1}{2}\right)^2,$$

sodass die den Bedingungen (F_1) genügenden Zahlen D die in den Wertevorräten der r linearen Formen

$$k_i^2 + p_i u_i \; (i = 1, 2, \ldots r; \; u_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gemeinschaftlich vorkommenden Zahlen sind.

Die lineare Form $k_i^2 + p_i u_i$ liefert in Bezug auf den Modul $p_i^{\alpha_i}$ die $p_i^{\alpha_i - 1}$ nachfolgenden inkongruenten Zahlen

$$k_i^2, k_i^2 + 1 \,.\, p_i, \ldots, k_i^2 + u_i p_i, \ldots, k_i^2 + (p_i^{\alpha_i - 1} - 1)\, p_i.$$

Es muss demnach D im Sinne der Bedingungen (F_1) eines der folgenden Systeme von linearen Kongruenzen befriedigen:

$$\left.\begin{aligned} D &\equiv k_1^2 + p_1 u_1 \pmod{p_1^{\alpha_1}} \\ D &\equiv k_2^2 + p_2 u_2 \pmod{p_2^{\alpha_2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D &\equiv k_r^2 + p_r u_r \pmod{p_r^{\alpha_r}} \end{aligned}\right\} \tag{C$_1$}$$

$$\left(k_i = 1, 2, \ldots, \frac{p_i - 1}{2}\,;\ u_i = 0, 1, \ldots, p_i^{\alpha_i - 1} - 1\,;\ i = 1, 2, \ldots, r\right).$$

Die sämmtlichen quadratischen Reste D von n werden daher durch die Formel

$$D' \equiv \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\right)^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} (k_i^2 + p_i u_i) \pmod{n} \tag{K$_1$}$$

$$\left(k_i = 1, 2, \ldots, \frac{p_i - 1}{2}\,;\ u_i = 0, 1, \ldots, p_i^{\alpha_i - 1} - 1\,;\ i = 1, 2, \ldots, r\right)$$

geliefert. In ähnlicher Weise kann auch eine Formel für die quadratischen Nichtreste hergeleitet werden worauf es sich erübrigt des Näheren einzugehen.

Aus der Formel (K_1) geht zugleich hervor, dass die Anzahl M der zum Modul n gehörigen quadratischen Reste sich folgendermassen ergibt:

$$M = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - 1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i - 1} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)}{2} =$$

$$= \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})}{2} \cdot \frac{\varphi(p_2^{\alpha_2})}{2} \cdots \frac{\varphi(p_r^{\alpha_r})}{2} = \frac{\varphi(n)}{2^r}$$

und da im Falle I

$$\psi(n) = 2^r$$

ist, so folgt schliesslich

$$M = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

womit für den Fall I der Beweis der Sätze *a)* und *b)* erbracht ist.

II. In diesem Falle ist $\alpha = 2$ und daher

$$n = 4 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Den Bedingungen (F_1) und dem System (K_1) ist für diesen Fall noch die weitere Bedingung resp. Kongruenz

$$D \equiv 1 \pmod{4}$$

hinzuzufügen. Die quadratischen Reste von n ergeben sich jetzt aus der Formel

$$D \equiv \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\right)^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} (k_i^2 + p_i u_i) \pmod{n}$$

$$\left(k_i = 1, 2, \ldots, \frac{p_i - 1}{2};\ u_i = 0, 1, \ldots, p_i^{\alpha_i - 1} - 1;\ i = 1, 2, \ldots, r\right).$$

Aus dieser Formel geht wiederum die Anzahl M der quadratischen Reste von n folgendermassen hervor:

$$M = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)}{2} = \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2}) \ldots \varphi(p_r^{\alpha_r})}{2^r} =$$

$$= \frac{\varphi(4)\varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2}) \ldots \varphi(p_r^{\alpha_r})}{2^{r+1}} = \frac{\varphi(n)}{2^{r+1}}$$

und da für den Fall II

$$\psi(n) = 2^{r+1}$$

ist, hat man wieder

$$M = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

womit die Sätze *a)* und *b)* auch für den Fall II bewiesen sind.

III. In diesem Falle muss den Bedingungen (F_1) noch die weitere

$$D \equiv 1 \pmod{8}$$

hinzugefügt werden. Es muss also D dem Wertevorrat der linearen Form

$$1 + 8u_0$$

entnommen werden, was für den Modul 2^α die Werte

$$1,\ 1 + 8.1,\ 1 + 8.2, \ldots 1 + 8u_0, \ldots 1 + (2^{\alpha-3} - 1)\,8$$

liefert. Somit ist dem System (K_1) die weitere Kongruenz

$$D \equiv 1 + 8u_0$$

hinzuzufügen. Für D ergibt sich dann die Formel

$$D \equiv \left(\frac{n}{2^\alpha}\right)^{\varphi(2^\alpha)} (1 + 8u_0) + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\right)^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} (k_i^2 + p_i u_i) \pmod{n}$$

$$\left(k_i = 1, 2, \ldots, \frac{p_i - 1}{2};\ u_0 = 0, 1, \ldots, 2^{\alpha-3} - 1;\ u_i = 0, 1, \ldots, p_i^{\alpha_i - 1} - 1;\right.$$

$$\left. i = 1, 2, \ldots, r\right)$$

und hieraus ergibt sich für die Anzahl der quadratischen Reste für den Modul n:

$$M = 2^{\alpha-3} \prod_{r=1}^{r} \frac{p_l^{\alpha_l-1}(p_l-1)}{2} = 2^{\alpha-3} \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2})\ldots\varphi(p_r^{\alpha_r})}{2^r} =$$

$$= \frac{\varphi(2^{\alpha})\,\varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2})\ldots\varphi(p_r^{\alpha_r})}{2^{r+2}}.$$

Da im Falle III

$$\psi(n) = 2^{r+1}$$

ist, hat man wieder

$$M = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

womit auch der Fall III erledigt ist.

Wir übergehen nun zum Nachweis des Satzes *c)*. Da die Anzahl der zum zusammengesetzten Modul n gehörigen quadratischen Reste

$$M = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$$

ist, so wird die Anzahl N der im reduzierten System von Resten (mod. n) enthaltenen Nichtresten

$$N = \varphi(n) - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \varphi(n)\left(1 - \frac{1}{\psi(n)}\right)$$

im Allgemeinen von M verschieden sein. Die beiden können dann und nur dann übereinstimmen, wenn

$$\psi(n) = 2$$

ist.

Im Falle I ist $\psi(n) = 2^r$, somit kann $M = N$ nur dann statt haben, wenn $r = 1$ ist, daher n vom Typus $n = p^{\alpha}$, $2p^{\alpha}$ ist.

Im Falle II ist $\psi(n) = 2^{r+1}$, somit kann M nur dann mit N gleich sein, falls $r = 0$ und daher $n = 4$ ist.

Im Falle III ist $\psi(n) = 2^{r+2}$, also stets gröszer als 2 und somit M stets verschieden von N.

Da durch die Fälle I, II, III sämmtliche Möglichkeiten erschöpft werden, *kann man zusammenfassend erklären, dass $n = p^{\alpha}$, $2p^{\alpha}$, 4 sämmtliche Typen von zusammengesetzten Moduln liefern, für welche die Anzahl der Reste und Nichtreste die gleiche ist.*

Es sind dies dieselben Typen von zusammengesetzten Moduln für die die Verallgemeinerung des Wilsonschen Satzes und die Existenz von primitiven Wurzeln nachgewiesen werden kann.

Schliesslich möge noch erwähnt werden, dass die Anzahl der im reduzierten System von Resten enthaltenen quadratischen

Reste auch auf einfacherer Weise hergeleitet werden kann, falls auf die Darstellung dieser quadratischen Reste durch eine Formel verzichtet wird.

Es seien die sämmtlichen quadratischen Reste des reduzierten Systems von Resten (mod. n)

$$D_1, D_2, \ldots, D_M$$

alsdann sind

$$x^2 \equiv D_i \pmod{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, M) \tag{B}$$

die sämmtlichen auflösbaren binomischen quadratischen Kongruenzen. Jede dieser Kongruenzen hat dieselbe Anzahl von Wurzeln, da diese Anzahl $\psi(n)$ nur von n und nicht von D_i abhängt. Die Wurzeln aller Kongruenzen (B) liefern somit $M\,\psi(n)$ Zahlen, die alle verschieden und gegen n teilerfremd sind, da die D_i es auch sind.

Es seien diese Wurzeln

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{M\varphi(n)} \tag{S₁}$$

so sind dieselben alle verschieden und im reduzierten System von Resten (mod. n)

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)} \tag{S₂}$$

enthalten.

Es kann aber auch gezeigt werden, dass jede Zahl von (S₂) auch in (S₁) enthalten ist, da ja r_i gewiss eine Wurzel von

$$x^2 \equiv r_i^2 \pmod{n}$$

ist. Es ist somit

$$M\,\psi(n) = \varphi(n)$$

und daher wieder

$$M = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}.$$

Budapest, am 1. Juni 1926.

(*Eingegangen am 4. Juni 1926*).

Laplacians and continuous linear functionals.[1])

By NORBERT WIENER (Cambridge, U. S. A.).

A classical theorem of F. RIESZ[2]) gives as the general representation for the continuous linear functional of a function $f(x)$ of the single variable x the STIELTJES integral

$$\int_a^b f(x)\, d\,\alpha(x),$$

where $\alpha(x)$ is a function of limited total variation. EVANS and others have given an analogous representation of the linear functional of a function $f(x_1, \ldots, x_n)$ of n variables, in the form of a multiple STIELTJES integral

$$\iint \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\, \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

where α is again in a certain sense a function of limited total variation.[3]) This representation suffers under the disadvantage of involving the particular choice of axes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ that is, of

---

1) Following a conversation I had with Prof. NORBERT WIENER about the subharmonic functions and their roll in the theory of the potential, he had the kindness to write at my request the present note for my own use, in which he gives an outline of the methods invented by him in researches covering a period of several years. In the hope, that Prof. WIENER will give a systematical exposé of these researches, I asked him to consent to the publication of the present note. *F. R.*

2) Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 29 nov. 1909; Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Annales de l'École normale supérieure,* t. 28, 1911, pp. 33—62; Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, *ibid.* t. 31, 1914, pp. 9—14.

3) See for instance CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, Les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent, *Bulletin des sciences mathématiques,* (2), 44, pp. 267—296, 1920.

not being vectorial. The problem of this paper is to give a vectorial, invariantive representation of the continuous linear functional of a function of n variables. We shall take for conveniance $n=3$.

The simplest vectorial differential operator in three variables is the Laplacian Δ. The simplest vectorial integral operator on a scalar function of a vector x is the anti-Laplacian, which yields

$$\varphi(x)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{|y-x|}\,dy.$$

The operator which bears to the Laplacian the same relation which the difference operator $\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$ does to the derivative is the operator

$$\frac{6}{h^2}\left\{\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{r}|=h}f(x+\mathfrak{r})\,dS-f(x)\right\}.$$

In order to see this last fact, let us suppose that $f(x)$ is representable by the triple Fourier integral

$$f(x)\sim\iiint_{\infty}^{\infty}F(u)e^{iu.x}\,du.$$

Then (at least formally)

$$\Delta f(x)\sim\iiint_{-\infty}^{\infty}-|u|^2F(u)\,e^{iu.x}\,du,$$

and

$$\frac{6}{h^2}\left\{\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{r}|=h}f(x+\mathfrak{r})\,dS-f(x)\right\}\sim$$

$$\sim\frac{6}{h^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin h|u|}{h|u|}-1\right\}F(u)\,e^{iu.x}\,du.$$

If both $F(u)$ and $|u^2|\,F(u)$ are summable and of summable square, it is then easy to prove, by appealing to the three-dimensional form of the Plancherel theory of Fourier transforms,[4]) that

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.\,m.}}\ \frac{6}{h^2}\left\{\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{r}|=h}f(x+\mathfrak{r})\,dS-f(x)\right\}=\Delta f(x).$$

---

[4]) Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rendiconti di Palermo*, 30 (1910), pp. 289—335.

The total variation of a function $f(x)$ which always has $f(x)$ between $f(x+0)$ and $f(x-0)$ may be written in the form

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \left| f(x+h) - f(x) \right| dx.$$

It is hence reasonable to consider

$$V(f) = \overline{\lim_{h\to 0}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{6}{h^2} \left| \frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{r}|=h} f(x+\mathfrak{r})\, dS - f(x) \right| dx$$

as the three-dimensional total variation of a function $f(x)$. Similarly to the Stieltjes integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\alpha(x) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{h} (\alpha(x+h) - \alpha(x))\, dx,$$

there corresponds what we shall write

$$\Gamma f(x) \varDelta \alpha(x) = \lim_{h\to 0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{6 f(x)}{h^2} \left(\frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{r}|=h} \alpha(x+\mathfrak{r})\, dS - \alpha(x) \right) dx.$$

We wish to prove the following analogue of Riesz' theorem: *Let $\alpha(x)$ be a function of limited total variation. Then*

$$\Gamma f(x) \varDelta \alpha(x)$$

is defined and finite for every function $f(x)$ which is bounded and continuous and vanishes as $|x| \to \infty$ by any route. We have

$$\Gamma f(x) \varDelta \alpha(x) \leqq \max |f(x)|\, V(\alpha).$$

Conversely, let $F\{f\}$ be a linear functional defined for all functions $f(x)$ which are bounded and continuous and vanish as $|x| \to \infty$ by any route, and let there be a number K such that

$$F\{f\} \leqq K \max |f(x)|.$$

Then there is a function $\alpha(x)$ of limited total variation such that

$$F\{f\} = \Gamma f(x) \varDelta \alpha(x).$$

This function $\alpha(x)$ is unique except for an additive arbitrary harmonic function.

Proof. To begin with, let us find a function $g(x)$ such that $g(x) = 0$ for all sufficiently large values of x, that $\varDelta g$ exists everywhere and is bounded and continuous, and that

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

for all x. This is possible, by general theorems on approximation. We have

$$
\begin{aligned}
\nabla g(x)\Delta\alpha(x) &= \lim_{h\to 0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{6g(x)}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\alpha(x+\mathfrak{x})\,dS-\alpha(x)\right)dx= \\
&= \lim_{h\to 0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{6\alpha(x)}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}g(x+\mathfrak{x})\,dS-g(x)\right)dx= \qquad \text{(A)}\\
&= \iiint_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\,\Delta g(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

It follows that $\nabla g(x)\,\Delta\alpha(x)$ exists. Furthermore

$$
\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\nabla g(x)\Delta\alpha(x) - \iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{6f(x)}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\alpha(x+\mathfrak{x})\,dS-\alpha(x)\right)dx\right|\leqq \varepsilon\, V(\alpha).
$$

As ε is arbitrarily small,

$$
\nabla f(x)\Delta\alpha(x) = \lim_{h\to 0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{6f(x)}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\alpha(x+\mathfrak{x})\,dS-\alpha(x)\right)dx
$$

exists. The fact that

$$\nabla f(x)\,\Delta\alpha(x)\leqq \max|f(x)|\,V(\alpha)$$

is obvious.

We now proceed to the second part of the theorem. Let $F\{f\}$ be a linear functional and let there be a number K such that

$$F\{f\}\leqq K\max|f(x)|.$$

If f is positive, we make the definition

$$G\{f\} = \underset{0\leqq g\leqq f}{\text{upper bound}}\; F\{g\}$$

and we extend the definition of G linearly to non-positive functions. It is easy to show that G is a well-defined non-negative linear functional, and that

$$G\{f\}\leqq K\max|f(x)|.$$

If f is positive

$$G\{f\}-F\{f\}\geqq 0.$$

Thus every continuous linear functional is the difference between two linear functionals of positive type. We may hence without essential restriction suppose that F is of positive type.

We now form the auxiliary function $\psi_r(x)$, in conformity with the conditions

$$\psi_r(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi|x|}; & [\,|x|\geqq r\,] \\ \dfrac{2|x|^2-3r|x|}{4\pi r^3}; & [\,|x|<r\,]. \end{cases}$$

The functions $\psi_r(x)$ are all negative, and do not increase with decreasing r. Let

$$\alpha_r(x)=F_{\mathfrak{x}}\,\psi_r(x-\mathfrak{x}).$$

We see that all functions $\alpha_r(x)$ are negative, and that the sequence $\alpha_r(x)$ is monotone non-increasing in r. It is easy to show that it follows from the continuity of ψ_r, that $\iiint_R \psi_r(x-\mathfrak{x})\,dx$ can be approximated to uniformly by a finite sum of ψ_r's, if R is any bounded region. From this we can readily conclude that

$$\iiint_R \alpha_r(x)dx=F_{\mathfrak{x}}\iiint_R \psi_r(x-\mathfrak{x})\,dx \geqq -\frac{1}{4\pi}F_{\mathfrak{x}}\iiint_R \frac{dx}{|x-\mathfrak{x}|},$$

which is finite. Hence the functions $\alpha_r(x)$ form for $r\to 0$ a monotone non-increasing sequence with bounded integral, and by a familiar theorem from the theory of the Lebesgue integral, have a limit-function $\alpha(x)$, integrable over any R.

The operator F may readily be extended from continuous functions to their limits.[5] If we represent the Laplacian as the limit of a differencequotient, it follows at once from the continuity of F that

$$\Delta\alpha_r(x)=F_{\mathfrak{x}}\,\Delta_x\,\psi_r(x-\mathfrak{x})=F_{\mathfrak{x}}\,\chi_r(x-\mathfrak{x}),$$

where

$$\chi_r(\mathfrak{b})=\begin{cases} \dfrac{6|\mathfrak{b}|-3r}{2\pi r^3|\mathfrak{b}|}; & [\,|\mathfrak{b}|<r\,] \\ \dfrac{3}{4\pi r^3} & [\,|\mathfrak{b}|=r\,] \\ 0 & [\,|\mathfrak{b}|>r\,] \end{cases}$$

It follows that

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\chi_r(\mathfrak{b})\,d\mathfrak{b}=1.$$

Thus if $f(x)$ is a continuous function vanishing at infinity,

[5] Cf. P. J. Daniell, Annals of Mathematics. 1920.

$$F\{f\}=\lim_{r\to 0} F\left\{\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\chi_r(x-\mathfrak{x})\,dx\right\}=\lim_{r\to 0}\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Delta\alpha_r(x)\,dx.$$

We have

$$\psi_r(x)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\mathfrak{x}|}\,\chi_r(x-\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}.$$

Furthermore

$$\frac{6}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\alpha_r(x+\mathfrak{x})\,dS-\alpha_r(x)\right)=$$

$$=F_{\mathfrak{y}}\left\{\frac{6}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\psi_r(x-\mathfrak{y}+\mathfrak{x})\,dS-\psi_r(x-\mathfrak{y})\right)\right\}=$$

$$=F_{\mathfrak{y}}\left\{\frac{6}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}dS\left(-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}\,\chi_r(x-\mathfrak{y}+\mathfrak{x}-y)\,dy\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}\,\chi_r(x-\mathfrak{y}-y)\,dy\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}F_{\mathfrak{y}}\left\{\frac{6}{h^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\chi_r(x-\mathfrak{y}-y)\,dy\left[\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\frac{1}{|y+\mathfrak{x}|}\,d\mathfrak{x}-\frac{1}{|y|}\right]\right\}=$$

$$=F_{\mathfrak{y}}\left\{\iiint_{-\infty}^{\infty}\chi_r(x-\mathfrak{y}-y)\,\chi_h(y)\,dy\right\}.$$

Hence

$$\frac{6}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\alpha(x+\mathfrak{x})\,dS-\alpha(x)\right)=$$

$$=\lim_{r\to 0}F_{\mathfrak{y}}\left\{\iiint_{-\infty}^{\infty}\chi_r(x-\mathfrak{y}-y)\,\chi_h(y)\,dy\right\}=F_{\mathfrak{y}}\,\chi_h(x-\mathfrak{y})=\Delta\alpha_h(x).$$

It follows that

$$F\{f\}=\lim_{h\to 0}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{6f(x)}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\iint_{|\mathfrak{x}|=h}\alpha(x+\mathfrak{x})\,dS-\alpha(x)\right)dx=\Gamma f(x)\,\Delta\alpha(x).$$

Thus our fundamental theorem is proved.

It remains to show that α is unique. This is equivalent to showing that if α is of limited total variation and

$$\Gamma f(x)\,\Delta\,\alpha(x)=0$$

for every admissible f, then α is harmonic. We have by (A)

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, G(x)\, dx = 0,$$

whenever $G(x)$ is a continuous distribution generating a potential vanishing at infinity and itself vanishing at infinity. Hence it follows by considering special types of f (functions f which depend only on the distance from a fixed point) that the mean value of α is constant on concentric spheres. By a simple application of KOEBE's form of the inverse of GAUSS' lemma,[6] it follows that $\alpha(x)$ is harmonic.

Let $\beta(x)$ be such that

$$\frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{r}|=h} \beta(x+\mathfrak{r})\, dS - \beta(x)$$

is non-negative for all x and h. We than call β *subharmonic.* Let us consider a subharmonic function $\beta(x)$ vanishing as $|x| \to \infty$ in such a manner that for all sufficiently large values of R,

$$\frac{d}{dR} \left\{ \frac{1}{R^2} \iint_{|x|=R} \beta(x)\, dS \right\} = O(1/R^2).$$

Then β is of limited total variation.

To show this, let us consider β_h. It is easy to show that this satisfies at infinity the same condition with regard to the radial derivative of its mean as β itself. Let us put

$$V_R = \iiint_{|x| \leq R} \frac{6}{h^2} \left| \frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{r}|=h} \beta(x+\mathfrak{r})\, dS - \beta(x) \right| dx.$$

Then

$$V_R = \iiint_{|x| \leq R} \Delta \beta_h(x)\, dx = \iint_{|x|=R} \frac{\partial \beta_h(x)}{\partial |x|}\, dS =$$

$$= R^2 \frac{d}{dR} \left\{ \frac{1}{R^2} \iint_{|x|=R} \beta_h(x)\, dS \right\} = O(1),$$

uniformly in h. The result is immediately obvious.

The author wishes to follow the lead of the ordinary theory of functions of limited total variation in connecting his work up with the theory of trigonometrical developments. For this he needs

---

[6]) P. KOEBE, Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft, *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft*, 5. Jahrgang, 1906, pp. 39—42.

the three-dimensional analogue of FEJÉR's theorem. The whole point of FEJÉR's theorem consists in finding a positive kernel $K(x-y)$, which has a trigonometric development approximating in form to that of $\sum_{1}^{\infty} \cos kx \cos ky$ as $n \to \infty$.

We form the corresponding three-dimensional kernel in the following manner: the FOURIER transform of the function $\varphi_r(x)$ defined by

$$\varphi_r(x) = \begin{cases} 1; & [\,|x| \leqq r\,], \\ 0; & [\,|x| > r\,] \end{cases}$$

is

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(x) e^{ix.u}\, dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - \xi^2)\, e^{i|u|\xi}\, d\xi = \frac{4\pi r}{|u|^2}\left(\frac{\sin|u|r}{|u|r} - \cos|u|r\right).$$

Hence the FOURIER transform of

$$\Phi_r(x) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\mathfrak{x})\, \varphi_r(x-\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \begin{cases} \pi\left(\dfrac{4r^3}{3} - r^2|x| + \dfrac{|x|^3}{12}\right) & [|x| \leqq 2r] \\ 0 & [|x| > 2r] \end{cases}$$

is

$$\left[\frac{4\pi r}{|u|^2}\left(\frac{\sin|u|r}{|u|r} - \cos|u|r\right)\right]^2.$$

It follows that if

$$f(u) \sim \iiint_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{ix.u}\, dx,$$

we have

$$\frac{1}{6\pi r^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(v) \frac{1}{|u-v|4}\left[\frac{\sin|u-v|r}{|u-v|r} - \cos|u-v|r\right]^2 dv =$$

$$= \iiint_{|x| \leqq 2r} F(x)\left(1 - \frac{3|x|}{r} + \frac{|x|^3}{16r^3}\right) e^{ix.u}\, dx.$$

An argument precisely like that used to prove the ordinary FEJÉR's theorem will then show that if $f(u)$ is a continuos function which is summable and of summable square,

$$\lim_{r \to \infty} \iiint_{|x| \leqq 2r} F(x)\left(1 - \frac{3|x|}{r} + \frac{|x|^3}{16r^3}\right) e^{ix.u}\, dx = f(u)$$

If in addition

$$\iiint_{|x| \leqq 2r} |F(x)|^2 |x^4\, dx = o(r),$$

a simple application of the SCHWARZ inequality will show that

$$\lim_{r\to\infty} \iiint\limits_{|x|\leq 2r} F(x)\left(-\frac{3|x|}{r}+\frac{|x|^3}{16r^3}\right)e^{ix.u}\,dx = 0,$$

and hence that

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{ix.u}\, dx = f(u)$$

as a convergent infinite integral.

In proving this theorem, we can replace the continuity of f by the weaker condition

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{4\pi h^2} \iint\limits_{|\mathfrak{x}|=h} f(x+\mathfrak{x})\, dS = f(x).$$

If f has a bounded Laplacian, we have indeed

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{4\pi h^2}\iint\limits_{|\mathfrak{x}|=h} f(x+\mathfrak{x})\, dS - f(x)\right] = O(1/h^2).$$

An intermediate condition is

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{4\pi h^2}\iint\limits_{|\mathfrak{x}|=h} f(x+\mathfrak{x})\, dS - f(x)\right] = o(1/h) \tag{C}$$

uniformly in x.

In the study of functions of limited total variation, the author[7]) has found the notion of the quadratic variation of a function very useful. The quadratic variation of $f(x)$ is

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\, |f(x+h)-f(x)|^2\, dx.$$

An analogous expression in the three-dimensional case is

$$Q_1(f) = \lim_{h\to 0} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{6}{h^3}\left|\frac{1}{4\pi h^2}\iint\limits_{|\mathfrak{x}|=h} f(x+\mathfrak{x})\, dS - f(x)\right|^2 dx.$$

If

$$f(x) \sim \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{iu.x}\, du,$$

[7]) N. WIENER, The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, *Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology*, 3, pp. 72—94.

we have

$$Q_1(f) = \lim_{h \to 0} \frac{6}{h^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin h|u|}{h|u|} - 1 \right\}^2 |F(u)|^2 \, du$$

It is easy to see that (C) implies that $Q_1(f) = 0$. Under these conditions, we see at once that

$$\lim_{h \to 0} h \iiint_{|u| < \frac{1}{h}} |u|^4 |F(u)|^2 \, du = 0.$$

It is thus clear that *if $f(x)$ is a function of limited total variation, and is summable and of summable square, and if condition* (C) *is fulfilled, then the* Fourier *integral of f converges uniformly to f.*

The expression $Q_1(f)$ is one of the hierarchy of expressions

$$Q_1(f) = \lim_{h \to 0} \frac{6}{h^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{x}| = h} f(x + \mathfrak{x}) \, dS - f(x) \right|^2 dx;$$

$$Q_2(f) = \lim_{h \to 0} \frac{6}{h^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{x}| = h} f(x + \mathfrak{x}) \, dS - f(x) \right|^2 dx;$$

$$Q_3(f) = \lim_{h \to 0} \frac{6}{h} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{4\pi h^2} \iint_{|\mathfrak{x}| = h} f(x + \mathfrak{x}) \, dS - f(x) \right|^2 dx.$$

If f is of limited total variation, it is easy to show that $Q_1(f)$ is finite, and if the distribution generating f contains point charges, Q_2 and Q_3 are infinite. If the charges of the charge distribution generating f are distributed continuously on a smooth curve Q_3 is infinite If the charges of the charge distribution generating f are distributed continuously on a smooth surface, all three are finite. We can thus regard the functions of limited total variation for which Q_2 and Q_1 respectively are finite as the natural generalizations of finite line and finite surface distributions, respectively.

(*Received October 20, 1926*).

Zur Summation der Fourierschen Reihe.

Von G. Szegö in Königsberg.

Die Summation der Fourierschen Reihe mit Hilfe von Cesàroschen Mitteln beliebiger positiver Ordnung ist vor einiger Zeit von Herrn M. Riesz auf eine sehr einfache Form gebracht worden.[1]) Wie Herr Fejér kürzlich[2]) besonders deutlich hervorgehoben hat, spielt bei dieser Frage sowie auch bei anderen verwandten, eine gewisse einfache Eigenschaft der Partialsummen der Binomialreihe eine Hauptrolle, eine Eigenschaft, die im wesentlichen auf die Herren S. Chapman und M. Riesz zurückgeht.[3])

In der neueren Zeit hat man bei der Fourierschen Reihe auch die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung mit negativem k, $k > -1$, untersucht und auf diese Weise manche klassischen Konvergenzsätze verschärft.[4]) Diesen Untersuchungen liegt hauptsächlich ein Satz des Herrn E. Kogbetliantz[5]) zu Grunde, den man folgendermassen formulieren kann:

Es sei $-1 < k < 1$, $k \neq 0$ *und*

$$(1) \qquad C_n^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{n!} = \binom{n+k}{n}.$$

---

1) Sur la sommation des séries de Fourier, diese Zeitschrift 1 (1923), S. 104—113.

2) Abschätzungen für die Legendreschen und verwandten Polynome, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 285—298.

3) Bezüglich eines einfachen Beweises vgl. G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome, Math. Zeitschr 25 (1926), S. 172—187.

4) E. Kogbetliantz, Analogie entre les séries trigonométriques et les séries sphériques au point de vue de leur sommabilité par les moyennes arithmétiques, Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) 40 (1923), S. 259—323; vgl. insbesondere S. 266—280. — A. Zygmund, Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, Series A: Sciences mathématiques 1925.

5) Vgl. a. a. O. S. 276—277.

Dann sind die Cesàro*schen Mittel k-ter Ordnung der Reihe*

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\ldots \tag{2}$$

in der folgenden Form darstellbar:

$$\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{1}{2}+ \tag{3}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{(k)}}{C_n^{(k)}}\cos\nu x=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}+r_n^{(k)}(x),$$

wobei für $0<x<2\pi$ *das Restglied* $r_n^{(k)}(x)$ *wie folgt abzuschätzen ist:*

$$|r_n^{(k)}(x)|\leqq\frac{|k|}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

Herr Kogbetliantz beweist diese Abschätzung mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes. Im Hinblick auf die Bedeutung und auf den elementaren Charakter dieses Resultates scheint es mir jedoch nicht ohne Interesse zu sein, eine elementare Begründung desselben zu geben. Dies soll im folgenden geschehen. Der hier darzulegende Beweis operiert mit ähnlichen einfachen Kunstgriffen, wie der a. a. O. [3]) für den S. Chapman—M. Rieszschen Hilfssatz gegebene und liefert für das Restglied $r_n^{(k)}(x)$ sogar eine etwas genauere Abschätzung wie (4). Diese Abschätzung beruht auf einer eigenartigen Darstellung des Restgliedes, aus der sich auch manche anderen Schlüsse ziehen lassen.

* * *

Wir beweisen den folgenden Satz:

Es sei $-1<k<1$, $k\neq 0$, *n positiv ganz. Für* $0<x<2\pi$ *gilt dann die folgende Darstellung des n-ten* Cesàro*schen Mittels k-ter Ordnung der Reihe* (2):

$$\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{(k)}}{C_n^{(k)}}\cos\nu x=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}} \tag{5}$$
$$+\frac{k}{2(n+1)}\left\{p_{1n}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+p_{2n}\left(\frac{\sin 2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\ldots+p_{\mu n}\left(\frac{\sin\mu\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\ldots\right\},$$

wo die Konstanten $p_{\mu n}$ (ausser von μ und n) nur von k abhängen und die Beziehungen

$$(6)\qquad p_{1n}>0,\ p_{2n}>0,\ldots,p_{\mu n}>0,\ldots,$$

$$(7)\qquad p_{1n}+p_{2n}+\ldots+p_{\mu n}+\ldots=1$$

erfüllen.

Bevor ich auf den Beweis dieses Satzes komme, bemerke ich, dass daraus (4) unmittelbar folgt. Es folgt sogar etwas schärfer

$$(8)\qquad 0<\frac{I_n^{(k)}(x)}{k}<\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}\qquad (0<x<2\pi).$$

Die Darstellung (5) kann aber sehr leicht bewiesen werden. Wir setzen bei festem k

$$C_0^{(k)}+C_1^{(k)}z+\ldots+C_n^{(k)}z^n=s_n(z),$$

so dass

$$(9)\qquad \begin{aligned} s_n^{(k)}(x)&=\frac{C_n^{(k)}}{2}+C_{n-1}^{(k)}\cos x+\ldots+C_0^{(k)}\cos nx\\ &=\Re\, e^{inx}\frac{s_n(e^{-ix})+s_{n-1}(e^{-ix})}{2}.\end{aligned}$$

Wir schreiben ferner

$$(10)\qquad \frac{1}{(1-z)^{k+1}}-s_n(z)=\frac{r_n(z)}{(1-z)^2},$$

wo also die Entwicklung von $r_n(z)$ die Form hat:

$$(11)\qquad r_n(z)=a_{n+1}^{(n)}z^{n+1}+a_{n+2}^{(n)}z^{n+2}+\ldots$$

Es ist dann

$$(10')\qquad r_n(z)=(1-z)^{1-k}-(1-z)^2s_n(z).$$

Aus der letzten Darstellung von $r_n(z)$ folgt, dass die Potenzreihe (11) (schon unter der Voraussetzung $k<1$) auf dem Einheitskreise absolut konvergiert.

Nun erhält man aus (9), da $(1-e^{-ix})^2=-e^{-ix}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2$ ist,

$$(12)\qquad \begin{aligned} s_n^{(k)}(x)&=\Re\frac{e^{inx}}{(1-e^{-ix})^{k+1}}+\\ &+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}\Re\, e^{i(n+1)x}\left[r_n(e^{-ix})+r_{n-1}(e^{-ix})\right]\\ &=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}+\frac{\varrho_n(x)}{8\sin^2\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

wo $\varrho_n(x)$ eine wohlbestimmte Kosinusreihe ist, für die wegen (11) die folgende Darstellung gilt:

$$
(13) \quad
\begin{aligned}
\varrho_n(x) &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos(\nu - n - 1)x + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^{(n-1)} \cos(\nu - n - 1)x \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(n)} \cos \mu x;
\end{aligned}
$$

hierbei ist

$$
(14) \quad
\begin{aligned}
& b_0^{(n)} = a_{n+1}^{(n)} + a_{n+1}^{(n-1)}, \quad b_1^{(n)} = a_{n+2}^{(n)} + a_n^{(n-1)} + a_{n+2}^{(n-1)}, \\
& b_\mu^{(n)} = a_{n+\mu+1}^{(n)} + a_{n+\mu+1}^{(n-1)} \qquad (\mu = 2, 3, 4, \ldots).
\end{aligned}
$$

Aus (12) folgt nach Multiplikation mit $\sin^2 \frac{x}{2}$ für $x \to 0$, dass $\lim\limits_{x \to 0} \varrho_n(x) = \varrho_n(0) = 0$, d. h.

$$
(15) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(n)} = 0,
$$

so dass

$$
(16) \qquad \varrho_n(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)} (\cos \mu x - 1) = -2 \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)} \sin^2 \mu \frac{x}{2}.
$$

Das Vorzeichen der $b_\mu^{(n)}$ kann leicht übersehen werden. Zu diesem Zwecke berechnen wir zuerst $b_0^{(n)}$ und $b_1^{(n)}$. Es ist nach (10)

$$
r_n(z) = (1 - z)^2 (C_{n+1}^{(k)} z^{n+1} + C_{n+2}^{(k)} z^{n+2} + \ldots),
$$

so dass

$$
a_{n+1}^{(n)} = C_{n+1}^{(k)}, \quad a_{n+2}^{(n)} = C_{n+2}^{(k)} - 2\, C_{n+1}^{(k)}
$$

Man hat also

$$
(17) \qquad b_0^{(n)} = 2(C_{n+1}^{(k)} - C_n^{(k)}) = \frac{2k}{n+1} C_n^{(k)}
$$

und

$$
(18) \quad b_1^{(n)} = C_{n+2}^{(k)} - 2\, C_{n+1}^{(k)} + C_n^{(k)} + a_{n+2}^{(n-1)} = \frac{k(k-1)}{(n+1)(n+2)} C_n^{(k)} + a_{n+2}^{(n-1)}.
$$

Die Koffizienten der Entwicklung von $(1-z)^{1-k}$ sind nun vom zweiten bzw. dritten Gliede an sämtlich negativ bzw. positiv, je nachdem $0 < k < 1$ oder $-1 < k < 0$ ist. Hieraus schliessen wir, dass

$$
a_{n+3}^{(n)}, \; a_{n+4}^{(n)}, \; a_{n+5}^{(n)}, \ldots
$$

sämtlich das entgegengesetzte Vorzeichen wie k haben. Es gilt somit für $0 < k < 1$

$$
(19) \qquad b_0^{(n)} > 0, \; b_1^{(n)} < 0, \; b_2^{(n)} < 0, \; b_3^{(n)} < 0, \ldots
$$

und für $-1 < k < 0$

$$
(20) \qquad b_0^{(n)} < 0, \; b_1^{(n)} > 0, \; b_2^{(n)} > 0, \; b_3^{(n)} > 0, \ldots
$$

Wegen (12) und (16) hat man nun

$$i_n^{(k)}(x) = -\frac{1}{4\,C_n^{(k)}}\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)}\left(\frac{\sin\mu\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

Hierbei ist

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)} = b_0^{(n)} = \frac{2k}{n+1}\,C_n^{(k)},$$

so dass

$$(21)\qquad -\frac{b_\mu^{(n)}}{4\,C_n^{(k)}} = \frac{k}{2(n+1)}\,p_{\mu n}$$

gesetzt, die Behauptung folgt.

Für $-1 < k < 0$ ist das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x - \frac{k+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}\,dx$$

konvergent (jedoch nicht für $0 < k < 1$), so dass dann durch Integration von (5) die Gleichung

$$(22)\qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x - \frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}\,dx + \frac{k}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}$$

entsteht, wobei gleichzeitig die Konvergenz der zuletzt angeschriebenen Reihe erkannt wird. Es gilt folglich

$$(23)\qquad \sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n} = O(n).$$

* * *

Wir betrachten das n-te Cesàrosche Mittel k-ter Ordnung der Reihe

$$(24)\qquad \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots,$$

d. h. den Ausdruck

$$(25)\qquad \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} = \frac{x}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{(k)}}{C_n^{(k)}}\,\frac{\sin\nu x}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \int_x^\pi \frac{s_n^{(k)}(t)}{C_n^{(k)}}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{s_n^{(k)}(t)}{C_n^{(k)}}\,dt.$$

Herr KOGBETLIANTZ beweist a. a. O. [4]) (S. 268–273), dass für $-1<k<0$

I. $$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{\pi}{2},$$

u. zw. gleichmässig in x, wenn x in einem festen Intervall im Innern von $[0, 2\pi]$ gelegen ist;

II. $$\left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\right|<S^{(k)},\qquad (n=1,2,3,\ldots;\ 0\leq x\leq 2\pi)$$

wo die positive Zahl $S^{(k)}$ von n und x unabhängig ist (sie hängt nur von k ab).

I. folgt offenbar aus (4) mit Beachtung von (25). Dagegen scheint II. aus (4) nicht zu folgen. Herr KOGBETLIANTZ schickt zum Beweise von II. eine Diskussion der Summen (25) voraus, die ebenfalls auf dem CAUCHYschen Integralsatze beruht. Wir zeigen, dass auch II. aus unserem Hauptsatz leicht hergeleitet werden kann.

Es ist für $0\leq x\leq\pi$

$$\left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\right|\leq$$

$$\left|\int_0^x\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)t-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}dt\right|+\frac{|k|\pi}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu p_{\mu n}$$

Die Funktion $$\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}-\frac{1}{t^{k+1}}$$

ist nun im Intervall $0<t\leq\pi$ samt ihrer ersten Ableitung beschränkt, so dass

$$\left|\int_0^x\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)t-\frac{k+1}{2}\pi\right]\left(\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}-\frac{1}{t^{k+1}}\right)dt\right|<\frac{A}{n},$$

wo A (wie auch weiter unten B und C) positiv ist und nur von k abhängt. Wir haben folglich wegen (23)

$$\left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\right|<+B\frac{C}{\left(n+\frac{k+1}{2}\right)^k}\left|\int_0^x\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)t-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{t^{k+1}}dt\right|=$$

$$=B+C\left|\int_0^{\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x}\frac{\cos\left(t-\frac{k+1}{2}\pi\right)}{t^{k+1}}dt\right|$$

Da das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(t-\frac{k+1}{2}\pi\right)}{t^{k+1}}\,dt$$
konvergiert, ist damit die Behauptung bewiesen.

* * *

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische, im Lebesgueschen Sinne integrable Funktion, die für $x=0$ stetig ist; es sei der Einfachheit halber $f(0)=0$. Man kann nach weiteren Bedingungen fragen, welche zur Folge haben, dass die Fouriersche Reihe von $f(x)$ an der Stelle $x=0$ mit den Cesàroschen Mitteln k-ter Ordnung, $-1<k<0$, summabel ist.

Aus (5) folgt für $-1<k<0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\,dx= \tag{26}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{x^{k+1}}\,dx+\frac{k}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}\,\sigma_\mu,$$
wobei
$$\frac{1}{\mu\pi}\int_0^\pi f(x)\left(\frac{\sin\mu\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx=\sigma_\mu \tag{27}$$
gesetzt worden ist.

Wir wissen, dass $\lim\limits_{\mu\to\infty}\sigma_\mu=0$ ist. Zu einer positiven Zahl ε kann also die positive ganze Zahl $M=M(\varepsilon)$ so bestimmt werden, dass für $\mu>M$
$$|\sigma_\mu|<\varepsilon$$
gilt. Es ist ferner $|\sigma_\mu|<\sigma$ für alle μ, wo σ von μ nicht abhängt. Wir haben folglich mit Beachtung von (7) und (23)
$$\frac{|k|}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}|\sigma_\mu|<$$
$$<\frac{|k|}{2(n+1)}\left(\sigma\sum_{\mu=1}^{M}\mu p_{\mu n}+\varepsilon\sum_{\mu=M+1}^{\infty}\mu p_{\mu n}\right)<\frac{|k|}{2(n+1)}\,\sigma M+\varepsilon K,$$
wo $K>0$ nur von k abhängt. Hieraus folgt, dass
$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}\,\sigma_\mu=0, \tag{28}$$

folglich

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}dx-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}dx\right)=0. \tag{29}$$

Im zweiten Gliede kann $C_n^{(k)}$ durch

$$\frac{n^k}{\Gamma(k+1)}$$

ersetzt werden, da doch der Fehler

$$=O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\int_0^\pi\frac{|f(x)|}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}dx=o(1)$$

ist.

Wir erhalten somit:

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische und im Lebesgue*schen Sinne integrable Funktion. Es sei ferner $-1<k<0$. Man setze endlich*

$$\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}-f(x_0)=\varphi(x)$$

und es sei

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0.$$

Die Fourier*sche Reihe von $f(x)$ ist an der Stelle $x=x_0$ dann und nur dann mit den* Cesàro*schen Mitteln k-ter Ordnung summabel, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\int_0^\pi\varphi(x)\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}dx=0$$

ist.

Berlin, Mai 1926.

(*Eingegangen am 15. Juni 1926.*)

Zur Theorie der konformen Abbildung.

Von M. Fekete in Budapest.

1. In meiner Note „Zum Koebeschen Verzerrungssatz"[1]) habe ich u. a. die folgenden zwei Sätze aufgestellt und bewiesen:

I. *Es sei die Funktion*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit $a_0 = \dots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu = 1$, $(\nu \geqq 1)$ *im Kreise* $|z| \leqq 1$ *regulär, sonst beliebig. Sei* $r = r_{f,\nu}$ *die grösste unter allen positiven Zahlen* r, *für welche die Gleichungen*

$$f(z) = re^{i\varphi}$$

bei jedem $\varphi \geqq 0, < 2\pi$ *im Kreise* $|z| \leqq 1$ *mindestens* ν *Wurzeln besitzen. Dann ist*

$$r_{f,\nu} \geqq p_\nu > 0,$$

wo p_ν *nur von* ν *abhängt.*[2])

II. *Es sei die Funktion*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit $a_0 = \dots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu = 1$, $(\nu \geqq 1)$ *für* $|z| \leqq 1$ *regulär, für* $0 < |z| \leqq 1$ *von* 0 *verschieden, sonst beliebig. Sei* $\varrho = \varrho_{f,\nu}$ *die grösste unter allen positiven Zahlen* ϱ, *für welche jeder Wert* w *mit* $|w| \leqq \varrho$ *im Kreise* $|z| \leqq 1$ *mindestens* ν*-mal von* $f(z)$ *angenommen wird. Dann ist*

$$\varrho_{f,\nu} \geqq s_\nu > 0,$$

wo s_ν *nur von* ν *abhängt.*[3])

---

[1]) Vorgelegt der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen in der Sitzung vom 18. Dez. 1925; erscheint in den Nachrichten der math.-phys. Klasse.

[2]) A. a. O [1]) S. 143. Satz IV.

[3]) A. a. O[1]) S. 143. Satz V.

Satz I stimmt im Spezialfalle $\nu = 1$ mit einem Satze von Herrn LANDAU[4]) überein, durch welchen er ein wohlbekanntes KOEBE–CARATHÉODORYsches Theorem[5]) von schlichten Abbildungen überraschender Weise auf nichtschlichte übertragen hat. Auch Satz II kann im Falle $\nu = 1$ als eine Verallgemeinerung dieses Theorems betrachtet werden u. zw. als eine solche, die im Vergleich mit der LANDAUschen Verallgemeinerung — dank der stärkeren Voraussetzungen — weitere Eigenschaften schlichter Bildpunktmengen bei nichtschlichten nachweist; übrigens wurde dieser Spezialfall durch Verfasser schon früher formuliert, als Nebenresultat seiner Untersuchungen „Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist."[6])

2. Der LANDAUsche Satz fand eine interessante Verallgemeinerung durch Herrn H BOHR,[7]) der d e zweite von den LANDAUschen Bedingungen $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ durch die Forderung $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f(z)| = 1$ (ζ eine beliebige feste Zahl des Intervalls $0 < \zeta < 1$) ersetzt hat und dabei zum folgenden Resultat gelangte:

Es sei ζ eine gegebene Zahl $> 0, < 1$ und $w = f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ eine beliebige für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion mit $a_0 = 0$ und $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f(z)| = 1$. Dann ist der Radius r_f des grössten Kreises $|w| = r_f$, dessen Punkte von $f(z)$ (für $|z| \leqq 1$) sämtlich angenommen werden, nicht kleiner als C, wo $C = C(\zeta)$ eine positive Zahl ist, die nur von ζ abhängt

In dieser Note werde ich zeigen, dass die Sätze I und II sich ähnlich, wie der LANDAUsche Satz durch den BOHRschen, erweitern lassen; sogar werden diese verallgemeinerten Sätze viel leichter bewiesen, als die ursprünglichen.

---

[4]) E. LANDAU, Zum KOEBEschen Verzerrungssatz [Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, *46* (1922), 347—348].

[5]) P. KOEBE, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven [Nachr. von der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, math.—phys. Klasse (1907), 191—210; s. insbes. S. 204.]. Weitere Literaturangaben a. a. O[1]), Fussnote [1]).

[6]) Erscheint demnächst im Jahresber. der Deutschen Math. Verein. (Satz II.)

[7]) H. BOHR, Über einen Satz von EDMUND LANDAU. [Scripta univ. atque biblioth. Hierosolymitanarum. Math. et Phys. *1* (1923)]. Diese Arbeit wurde mir nach Abfassung meiner Note a. a. O[1]), durch eine freundliche Mitteilung von Herrn LANDAU bekannt.

3. Zunächst formuliere ich die Verallgemeinerung (nach Bohrs Art) des Satzes I:

III. *Es sei ζ eine gegebene Zahl im Intervalle* $0 < \zeta < 1$ *und*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

eine beliebige für $|z| \leq 1$ *reguläre Funktion mit* $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$ $(\nu \geq 1)$, $\operatorname{Max}_{|z|=\zeta} |f(z)| = 1$. *Dann ist der Radius* $r_{f,\nu}$ *des grössten Kreises* $|w| = r_{f,\nu}$, *dessen Punkte von (durch* $w = f(z)$ *gelieferten) Bildpunkten des Einheitskreises mindestens ν-fach überdeckt werden, nicht kleiner als* C_ν, *wo* $C_\nu = C_\nu(\zeta)$ *eine positive Zahl ist, die nur von ζ und ν abhängt.*

Beim Beweise von III stütze ich mich auf eine Folgerung eines bekannten Bieberbachschen[8]) Satzes aus dem Picard—Landauschen Ideenkreise, die folgendermassen lautet.

Es sei $g(z) = b_0 + b_\nu z^\nu + b_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots$ *für* $|z| \leq 1$ *regulär und nehme dort den Wert* 0, *wie den Wert* 1 *höchstens je* $(\nu-1)$*-mal an,* $(\nu \geq 1)$. *Ferner sei* $|g(0)| = |b_0| \leq 1$. *Dann gibt es zu jedem Werte ζ des Intervalls* $0 < \zeta < 1$ *eine nur von ν und ζ abhängige positive Zahl* $\Omega_\nu(\zeta)$ *derart, dass für* $|z| \leq \zeta$ $|g(z)| \leq \Omega_\nu(\zeta)$ *ist.*[9])

Aus diesem Hilfssatze folgt die Existenz einer Zahl $C_\nu = C_\nu(\zeta)$ im Sinne des Satzes III Schritt für Schritt auf dieselbe Weise, wie im Falle $\nu = 1$ bei Bohr aus dem Landau-Schottkyschen Satze; z. B. besitzt die Zahl

$$T_\nu = T_\nu(\zeta) = \frac{1}{1 + 3\Omega_\nu(\zeta)}$$

gewiss die gewünschte Eigenschaft.

Sonst gäbe es nämlich eine für $|z| \leq 1$ reguläre Funktion $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$, $\operatorname{Max}_{|z|=\zeta} |f_0(z)| = 1$, für welche der Radius $r_{f_0,\nu} < T_\nu$ wäre und welche also weder sämtliche Werte w mit $|w| = T_\nu$, noch sämtliche Werte w mit $|w| = 2T_\nu$ mindestens ν-mal im Kreise $|z| < 1$ annehmen würde, etwa nicht die Werte $\alpha = T_\nu e^{i\varphi}$ und $\beta = 2T_\nu e^{i\psi}$. (φ, ψ reelle Zahlen.)

Wird

$$g(z) = \frac{f_0(z) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

[8]) L. Bieberbach, Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen [Math. Ann., 85 (1922). 141—148].

[9]) A. a. O [1]). S. 147. Satz X.

gesetzt, so genügt die Funktion

$$g(z) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{a_\nu}{\beta-\alpha} z^\nu + \dots$$

offenbar sämtlichen Voraussetzungen des vorangehenden Hilfssatzes, da sie ja für $|z| \leqq 1$ regulär und höchstens je $(\nu-1)$-mal gleich 0 oder 1 ist, ferner die Ungleichung

$$|g(0)| = \left|\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right| \leqq \frac{\Gamma_\nu}{2\Gamma_\nu - \Gamma_\nu} = 1$$

befriedigt; folglich besteht für $|z| \leqq \zeta$

$$|g(z)| < \Omega_\nu(\zeta),$$

und daher ist für $|z| \leqq \zeta$

$$|f_0(z)| = |\alpha + (\beta-\alpha) g(z)| < \Gamma_\nu + 3\Gamma_\nu \Omega_\nu(\zeta) = 1,$$

gegen die Voraussetzung $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f_0(z)| = 1$.

Mit Hilfe der eben bewiesenen Existenz der Zahl $C_\nu(\zeta)$ kann man sehr leicht auf die Existenz der Zahl p_ν des Satzes I (also aus der Richtigkeit von III auf das Bestehen von I) schliessen. Ist nämlich der ν-te Koeffizient in der Potenzreihe von $f(z)$, d. h. $a_\nu = 1$, so folgt aus der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} dz$$

die Ungleichung

$$\underset{|z|=\frac{1}{2}}{\text{Max.}} |f(z)| \geqq \frac{1}{2^\nu};$$

daher genügt z. B. die Zahl

$$p_\nu = \frac{1}{2^\nu} \cdot C_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$$

den Forderungen des Satzes I.

4. Nun werde ich die folgende Verallgemeinerung (in Bohrschem Sinne) des Satzes II beweisen:

IV. *Es sei ζ eine gegebene Zahl im Intervalle $0 < \zeta < 1$ und*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

eine beliebige für $|z| \leqq 1$ reguläre und für $0 < |z| \leqq 1$ von der Null verschiedene Funktion mit $a_0 = \dots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu \neq 0$, $(\nu \geqq 1)$,

$\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f(z)| = 1$. *Dann ist der Radius* $\varrho_{f,\nu}$ *der grössten Kreisscheibe* $|w| \leqq \varrho_{f,\nu}$, *deren Punkte von den durch* $w = f(z)$ *gelieferten Bildpunkten des Einheitskreises mindestens* ν*-fach überdeckt sind, nicht kleiner als* D_ν, *wo* $D_\nu = D_\nu(\zeta)$ *eine positive Zahl ist, die nur von* ν *und* ζ *abhängt.*

Beim Beweise dieses Satzes benutze ich einen Hilfssatz, der wiederum aus dem BEBERBACHschen Satze folgt und so lautet:

Ist

$$g(z) = c_\nu z^\nu + c_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots \qquad (\nu \geqq 1)$$

für $|z| \leqq 1$ *regulär und besitzt ebenda höchstens* $\nu - 1$ *Eins- und genau* ν *Nullstellen, so besteht für* $|z| \leqq \zeta < 1$ *die Ungleichung*

$$|g(z)| < A,$$

wo die positive Zahl $A = A(\nu, \zeta)$ *nur von* ν *und* ζ *abhängt.*[10])

Ich behaupte: die Zahl

$$\varDelta_\nu = \varDelta_\nu(\zeta) = \frac{1}{A(\nu, \zeta)}$$

genügt den Forderungen betreffend die Grösse $D_\nu(\zeta)$ des Satzes IV. Sonst gäbe es nämlich eine für $|z| \leqq 1$ reguläre, für $0 < |z| \leqq 1$ nicht verschwindende Funktion $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu \neq 0$, $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f_0(z)| = 1$, für welche der Radius $\varrho_{f_0,\nu} < \varDelta_\nu$ wäre und welche also nicht sämtliche Werte w mit $|w| \leqq \varDelta_\nu$ im Einheitskreise mindestens ν-mal annähme, etwa nicht den Wert α, wo $0 < |\alpha| \leqq \varDelta_\nu$ ist. Setzt man nun

$$g(z) = \frac{f_0(z)}{\alpha} = \frac{a_\nu}{\alpha} z^\nu + \ldots,$$

so genügt $g(z)$ offenbar sämtlichen Voraussetzungen des vorangeschickten Hilfssatzes, folglich ist für $|z| \leqq \zeta$

$$|g(z)| < A(\nu, \zeta)$$

und daher ebenda

$$|f_0(z)| = |\alpha g(z)| < \alpha A(\nu, \zeta) \leqq \varDelta_\nu A(\nu, \zeta) = 1,$$

gegen die Voraussetzung $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max}} |f_0(\zeta)| = 1$.

---

[10]) A. a. O [1]) S. 148. §. 6.

Damit ist obige Behauptung bewiesen.[11])

Da, wie oben gesagt, aus $a_\nu = 1$ für die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Ungleichung $\underset{|z|=\frac{1}{2}}{\mathrm{Max.}} |f(z)| \geqq \frac{1}{2^\nu}$ folgt, so genügt offenbar die Zahl

$$s_\nu = \frac{1}{2^\nu} D_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$$

den Forderungen des Satzes II. Das zeigt aber, dass der letztgenannte Satz im Satze IV. wirklich enthalten ist.

5. Schliesslich sei zur Orientierung bemerkt, dass der Satz IV. nicht aus dem Satze III gefolgert werden kann, wie man es etwa meinen könnte. Es gibt nämlich Funktionen $f(z)$, die den Voraussetzungen des Satzes III genügen und für welche $\varrho_{f,\nu}$ kleiner ausfällt als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε_0. Sei z. B. $f(z)$ definiert durch die Gleichung

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z^\nu}{\delta}} - 1}{\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max}} \left| e^{\frac{z^\nu}{\delta}} - 1 \right|} = \frac{e^{\frac{z^\nu}{\delta}} - 1}{M} = \frac{z^\nu}{\delta M} + \ldots$$

wo $\delta > 0$ und $0 < \zeta < 1$ ist. Dann ist $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ offenbar regulär und es besteht die Relation

$$\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max.}} |f(z)| = 1,$$

während die Gleichung

$$f(z) = -\frac{1}{M}$$

---

[11]) Aus dem Bestehen des Satzes IV. im Falle $\nu = 1$ folgt leichtersichtlich die Richtigkeit dasselben bei beliebigem $\nu > 1$, mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffes, auf dessen Anwendbarkeit in diesem Forschungsgebiete ich durch eine Bemerkung des Hern BIEBERBACH freundlichst aufmerksam gemacht wurde: Genügt $f(z) = a_\nu z^\nu + \ldots$ den Voraussetzungen des Satzes IV, so genügt denselben auch $\varphi(z) = \sqrt[\nu]{a_\nu z^\nu + \ldots} = \alpha_1 z + \ldots$ Nun ist offenbar $\rho_{f,\nu} = \rho_{\varphi,1}^\nu$; besteht also $\rho_{\varphi,1} \geqq D_1(\zeta)$, so ist $\rho_{f,\nu} \geqq D_1(\zeta)^\nu$. Folglich besitzt die Zahl $D_1(\zeta)^\nu$ die gewünschten Eigenschaften der Grösse $D_\nu(\zeta)$ bei jedem ν. (Zum Beweise der Existenz von $D_1(\zeta)$ genügt die Anwendung des LANDAU SCHOTTKYschen Satzes statt der des Satzes von BIEBERBACH.)

keine Wurzel besitzt. Bei genügend kleinem δ ist aber

$$\frac{1}{M} \leqq \frac{1}{-1+e^{\frac{z^{\nu}}{\delta}}} < \varepsilon_0,$$

also $\varrho_{f,\nu} < \varepsilon_0$, wie behauptet wurde.[12])

Budapest, 31. I. 1926.

(*Eingegangen am 5. Februdr 1926.*)

---

[12]) Ebensowenig ist Satz II im Satze I enthalten. Das folgt im Falle $\nu = 1$ aus einer Bemerkung des Herrn Bohr (vgl. Fussnote [1]) a. a. O [7])) und für beliebiges $\nu > 1$ aus der Betrachtung von solchen Funktionen, welche nach Analogie des Bohrschen Beispiels gebildet sind.

Über den Grad der Annäherung durch die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe.

Von GEORG ALEXITS in Budapest.

1. Die nach 2π periodische Funktion

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

sei im Intervalle $(0, 2\pi)$ in LEBESGUEschem Sinne integrierbar. Die n-te Partialsumme des CESÀROschen Mittels δ-ter Ordnung ihrer FOURIERreihe sei

$$s_n^{(\delta)}(x) = \frac{a_0}{2} +$$

$$+ \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+\delta}{k} (a_{n-k} \cos (n-k)\, x + b_{n-k} \sin (n-k)\, x), \tag{2}$$

also ist $s_n^{(0)}(x)$ die n-te Partialsumme der FOURIERreihe (1) und $s_n^{(1)}(x)$ ihr n-tes arithmetisches Mittel:

$$s_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n+1} (s_0^{(0)}(x) + s_1^{(0)}(x) + \ldots + s_n^{(0)}(x)).$$

Die arithmetischen Mittel betreffend zeigte Herr S. BERNSTEIN[1]) die Richtigkeit der folgenden beiden Sätze:

Genügt die Funktion $f(x)$ einer Lipschitzbedingung α-ter Ordnung:

$$\left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta^\alpha} \right| < M$$

so folgt:

$$s_n^{(1)}(x) - f(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

---

[1]) S. BERNSTEIN: Mém. Acad. Belg. 4 (1912), p. 1–101.

wenn $\alpha = 1$ *ist und*

$$s_n^{(1)}(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

wenn $\alpha < 1$, *jedoch* > 0 *ist.*

2. Diese beiden Sätze lassen zweierlei Fragen offen, welche aber nicht ohne Interesse zu sein scheinen. Die erste Frage bezieht sich auf nicht gleichmässige Approximationen. Die LIPSCHITZbedingung involviert nämlich die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und der von Hrn. BERNSTEIN angegebene Annäherungsgrad ist tatsächlich gleichmässig erfüllt und zwar im Inneren eines jeden Stetigkeitsintervalles, in welchem die zugehörige LIPSCHITZbedingung erfüllt wird. Da aber die arithmetischen Mittel bei jeder Funktion mit Unstetigkeiten erster Art den Approximationsgrad $o(1)$ haben, denn es ist dann bekanntlich[2])

$$s_n^{(1)}(x) - f(x) = o(1)$$

in jedem Punkte x aus $(0, 2\pi)$, erhebt sich die Frage: wann lässt sich bei unstetigen Funktionen, also bei nicht gleichmässigen Annäherungen der Annäherungsgrad $o(1)$ verbessern?

Die zweite Frage entsteht aus dem Verhalten der CESÀROschen Mittel positiver Ordnung, da bei $\delta > 0$ die Gleichung

$$s_n^{(\delta)}(x) - f(x) = o(1)$$

in jedem Punkte, in welchem $f(x+0) + f(x-0)$ existiert, zutrifft[3]) bzw. in $(0, 2\pi)$ fast überall richtig ist.[4]) Mann könnte daher fragen: unter welchen Bedingungen wird ein von den arithmetischen Mitteln erreichter Annäherungsgrad $o(\mu)$ auch für ein CESÀROsches Mittel δ-ter Ordnung richtig?

3. Im Folgenden wird in dieser Hinsicht der weitgehende Satz bewiesen:

Wenn an einer Stelle x die Gleichung

$$\frac{1}{h}\int_0^h \frac{|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)|}{t^\alpha}\, dt < K$$

[2]) L. FEJÉR: C. R. Paris 131 (1900), p. 984–987.

[3]) M. RIESZ: C. R. Paris 149 (1909), p. 909–912. und S. CHAPMAN: London Math. Soc. Proc. 9 (1911), p. 369–409.

[4]) G. H. HARDY: London Math. Soc. Proc. 12 (1913), p. 365–372.

erfüllt ist, wobei K eine Konstante bezeichnet, so ist

$$s_n^{(\delta)}(x)-f(x)=O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right) \tag{3}$$

für alle $\delta \geqq \alpha$.

Einem Spezialfalle dieses Satzes steht ein ihm gleichwertiger, in neuester Zeit von Hrn. Szász bewiesener Satz[5]) an der Seite. Ist nämlich $\delta=1$ und $\alpha=1$, so folgt nach (3):

$$s_n^{(1)}(x)-f(x)=O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Herr Szász zeigt aber an der betreffenden Stelle, dass

$$2\pi\frac{n}{\log n}\left(s_n^{(1)}(x)-f(x)\right)\to g(x),$$

wenn es im Punkte x Werte $f(x)$ und $g(x)$ derart gibt, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin t}-g(x)\right|dt=0$$

erfüllt wird. Man sieht die Äquivalenz beider Behauptungen unschwer ein.

4. Vor Allem sollen einige Formeln für die Rechnung mit $s_n^{(\delta)}(x)$ zusammengestellt werden. Aus der Definitionsgleichung

$$\binom{k+\delta}{k}=\frac{(1+\delta)(2+\delta)\ldots(k+\delta)}{k!}$$

ergibt sich nach einer kurzen Rechnung die folgende bekannte Formel:

$$\binom{k+\delta}{k}=\binom{k-1+\delta}{k}+\binom{k-1+\delta}{k-1},$$

woraus dann durch wiederholte Anwendung

$$\binom{n+\delta}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k-1+\delta}{k} \tag{4}$$

folgt. Mit Hilfe dieser Gleichung (4) erhält man sofort:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+\delta}{k}u_{n-k}=\binom{\delta}{0}u_n+\left[\binom{\delta}{0}+\binom{\delta}{1}\right]u_{n-1}+\ldots+u_1\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}=$$

$$=\binom{\delta}{0}\sum_{k=0}^{n-1}u_{n-k}+\binom{\delta}{1}\sum_{k=1}^{n-1}u_{n-k}+\binom{1+\delta}{2}\sum_{k=2}^{n-1}u_{n-k}+\ldots+\binom{n-2+\delta}{n}u_1.$$

---

[5]) O. Szász: Math. és Phys. Lapok 32 (1925), p. 18—24. (ungarisch); p. 24—25 (deutsch).

Setzt man hier $u_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, so folgt aus (2) nach einer einfachen Überlegung:

$$s_n^{(\delta)}(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k- \quad +\delta}{k} s_{n-k}^{(0)}(x). \tag{5}$$

Die Darstellung (5) ergibt in der bekannten DIRICHLETschen Weise:

$$s_n^{(\delta)}(x) - f(x) = \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) K_n(t)\, dt, \tag{6}$$

wobei

$$\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$$

und

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k-1+\delta}{k} \frac{\sin[2(n-k)+1]t}{\sin t}. \tag{7}$$

bezeichnet. Herr M. RIESZ zeigte[6]) die Richtigkeit von

$$\frac{|K_n(t)|}{\binom{n+\delta}{n}} < \frac{C}{n^\delta t^{1+\delta}}, \tag{8}$$

wobei C eine Konstante ist und t im Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ variiert.

5. Um die Behauptung des Anfangs ausgesprochenen Satzes zu beweisen, wollen wir das in (6) auftretende Integral in drei Teile zerfallen lassen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2n+1}} + \int_{\frac{1}{2n+1}}^{h} + \int_h^{\frac{\pi}{2}}.$$

Nehmen wir nun an, dass im Punkte x die Bedingung

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{h} \Phi(h) < K \tag{9}$$

erfüllt ist, wobei K eine Konstante und h klein genug ist, ausserdem α eine Zahl > 0 und $\leqq 1$ bedeutet. Wenn wir noch beachten, dass im Intervalle $\left(0, \frac{1}{2n+1}\right)$ die Ungleichung $\frac{1}{\sin t} \leqq \frac{1+\nu(n)}{t}$ besteht, wobei $\nu(n)$ mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, so folgt nach

6) M. RIESZ: Acta Litt. ac. Sc. Univ. Hung. Fr. J. 1 (1923), p. 104—113.

der Darstellung (7) des Kernes $K_n(t)$:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\,|K_n(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}\frac{\sin[2(n-k)+1]t}{\sin t}\right|dt\leqq$$

$$\leqq\frac{1+\nu(n)}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}\frac{|\sin[2(n-k)+1]t|}{t}\,dt\leqq$$

$$\leqq\frac{1+\nu(n)}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}\frac{|\varphi(t)|}{t^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}\left(\frac{|\sin[2(n-k)+1]t|}{t}\right)^{1-\alpha}dt\leqq$$

$$\leqq\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}[2(n-k)+1]^{1-\alpha}[\;+\nu(n)]}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}\frac{\varphi(t)|}{t^\alpha}\,dt<$$

$$<\frac{[1+\nu(n)]\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}}{\binom{n+\delta}{n}\pi}(2n+1)^{1-\alpha}\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right).$$

Aus (4) und (9) folgt daher:

$$\tag{10}\begin{aligned}&\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\,|K_n(t)|\,dt<\\&<\frac{[1+\nu(n)]\,n}{\pi(n+\delta)(2n+1)^\alpha}(2n+1)\,\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).\end{aligned}$$

Auf das Integral $\int_{\frac{1}{2n+1}}^{b}$ wenden wir Ungleichung (8) an und integrieren dann partiell:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_{\frac{1}{2n+1}}^{b}|\varphi(t)|\,|K_n(t)|\,dt<\frac{C}{\pi n^\delta}\int_{\frac{1}{2n+1}}^{b}\frac{|\varphi(\;)|}{t^{1+\delta}}\,dt\leqq$$

$$\leqq \frac{C(2n+1)^{\delta-\alpha}}{\pi n^{\delta}} \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{|\varphi(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{C(2n+1)^{\delta-\alpha}}{\pi n^{\delta}} \left[\frac{\Phi(h)}{h} - (2n+1)\, \Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt \right] =$$

$$= \frac{C(2n+1)^{\delta-\alpha}}{\pi n^{\delta}} \left[\frac{\Phi(h)}{h} - (2n+1)\, \Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \frac{\Phi(\tau)}{\tau} \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{dt}{t} \right].$$

Infolge (9) erhalten wir demnach:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi} \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} |\varphi(t)|\, |K_n(t)|\, dt <$$

$$(11) \qquad < \frac{K}{(2n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{C(2n+1)^{\delta}}{\pi n^{\delta}} \left(2 + \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{dt}{t} \right) =$$

$$= \frac{K}{(2n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{C(2n+1)^{\delta}}{\pi n^{\delta}}\, (2 + \log(2n+1)\, h) = O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right).$$

Das Integral $\int\limits_{h}^{\frac{\pi}{2}}$ bedeutet natürlich keinen Beitrag. Dies ist zu sehen bei Beachtung von $\delta \geqq \alpha$ und (8), wonach

$$(12) \quad \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi} \int\limits_{h}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)|\, |K_n(t)|\, dt < \frac{C}{\pi n^{\delta}} \int\limits_{h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(t)|}{t^{1+\delta}}\, dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Die Relationen (6), (10), (11) und (12) ergeben zusammen:

$$s_n^{(\delta)}(x) - f(x) = O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right),$$

was aber die Behauptung war.

Budapest, 20. März 1926.

(Eingegangen am 23, März 1926.)

Über die Cesàroschen Mittel Fourierscher Reihen.

Von Otto Szász in Frankfurt a. Main.

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion mit der Fourierschen Entwickelung

$$(1) \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x);$$

es sei ferner k eine reelle Zahl > -1 und

$$(1-x)^{-(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(k)} x^\nu = 1 + (k+1)x + \ldots,$$

also

$$(2) \qquad c_\nu^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+\nu)}{1 \,.\, 2 \,\ldots\, \nu} \sim \frac{\nu^k}{\Gamma(k+1)},\ k > -1.$$

Setzt man nun

$$(3) \qquad s_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2} c_n^{(k)} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}^{(k)} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

so heissen die Summen $\frac{1}{c_n^{(k)}}\, s_n^{(k)}(x)$ die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung der Reihe (1). Sie konvergieren für $k > 0$ und $n \to \infty$ unter weitgehenden Bedingungen zum Funktionswert. Insbesondere ist

$$(k=0) \qquad s_n^{(0)}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = s_n$$

$$(k=1) \qquad s_n^{(1)}(x) =$$

$$= \frac{n+1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = s_0 + s_1 + \ldots + s_n.$$

Die arithmetischen Mittel (erster Ordnung)

$$\frac{s_n^{(1)}(x)}{n+1} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = \sigma_n$$

wurden von Herrn Fejér mit grossem Erfolg in diese Theorie eingeführt. In zwei Arbeiten zeigte ich kürzlich, dass durch diese Mittel nicht nur der Funktionswert, sondern auch andere, mit der Funktion eng zusammenhängende Werte dargestellt werden können. Es gilt nämlich der Satz:

Wenn die Funktion $f(x)$ bei passender Wahl der Grössen s, g und α $(0 < \alpha \leqq 1)$ der Bedingung genügt

$$(4) \qquad \frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-gt^\alpha|\,dt \to 0 \text{ für } h \to +0,$$

so gilt für die Mittel erster Ordnung

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha(\sigma_n - s) = \frac{g}{\pi}\cdot\gamma, \text{ falls } 0<\alpha<1,\ \gamma = \frac{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{(1-\alpha)2^\alpha},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(\sigma_n - s) = \frac{g}{2\pi}, \text{ falls } \alpha = 1.$$

Wenn insbesondere die Grenzwerte

$$(4') \qquad \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \to r, \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t} \to l,\ t \to +0,$$

existieren, so ist die Voraussetzung (4) mit

$$s = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],\ g = 2(r-l),\ \alpha = 1$$

erfüllt, dann ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(\sigma_n - s) = \frac{r-l}{\pi}.\text{[1]}$$

Der Spezialfall $g = 0$ liefert den Satz:

Aus

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s|\,dt \to 0 \text{ für } h \to +0$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha(\sigma_n - s) = 0, \text{ falls } 0<\alpha<1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(\sigma_n - s) = 0, \text{ falls } \alpha = 1.$$

Für $\alpha = 0$ erhält man einen bekannten Satz von Lebesgue.

---

[1] Szász, *a)* A Fourier-féle sorok számtani közepeiről, Math. Phys. Lapok XXXII, 1925, p. 15—25. *b)* Über die arithmetischen Mittel Fourierscher Reihen, Acta Math. 48, 1926, p. 353—362.

Im folgenden zeige ich, dass entsprechende Sätze für die CESÀROschen Mittel k-ter Ordnung gelten, falls $0<k<1$ ist.

§ 1. *Der Fall* $g=0$.

Es sei also zunächst

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s|\,dt \to 0 \text{ für } h\to +0; \tag{5}$$

ich gehe aus von der bekannten Formel

$$s_n^{(k)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\left(\frac{1}{2}c_n^{(k)}+\sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}^{(k)}\cos\nu t\right)dt$$

$$=\frac{c_n^{(k)}}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\,H_n(t)\,dt.$$

Hierbei ist

$$c_n^{(k)} H_n(t)=\frac{1}{2}c_n^{(k)}+\sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}^{(k)}\cos\nu t \tag{6}$$

und

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi H_n(t)\,dt=1.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s]\,H_n(t)\,dt\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,H_n(2t)\,dt,\end{aligned} \tag{7}$$

wobei

$$f(x+2t)+f(x-2t)-2s=\varphi(t)$$

gesetzt ist.

Es sei nun $0<k<1$; dann gelten die Ungleichungen[2])

---

[2]) Sie wurden von den Herren M. RIESZ und S. CHAPMAN gefunden; man vgl. z. B. M. RIESZ, Sur la sommation des séries de Fourier, Acta Litterarum ac Scientiarum Univ. Francisco-Josephinae. Szeged, I, (1923), p. 104–113.

$$\left.\begin{array}{ll}(8a) & |H_n(t)| < A_1 n \\ (8b) & |H_n(t)| < A_2 n^{-k} t^{-k-1}\end{array}\right\} \quad 0 < t < \pi.^{3)}$$

Hieraus ergibt sich leicht eine Abschätzung der rechten Seite von (7). Sei nämlich $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, sonst beliebig. Nach der Voraussetzung (5) kann man $\delta = \delta(\varepsilon) < 1$ so bestimmen, dass

$$\int_0^h |\varphi(t)|\, dt < \varepsilon h^{1+\alpha} \text{ für } h < \delta.$$

Es sei ferner $\frac{1}{n} < \delta$, also $n > \frac{1}{\delta}$; dann ist nach (8a)

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t) H_n(2t)\, dt\right| < A_1 n \,.\, \varepsilon n^{-1-\alpha} = A_1 \varepsilon \,.\, n^{-\alpha}$$

Sodann ist nach (8b)

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \varphi(t) H_n(2t)\, dt\right| \leqq A_3 n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)|\, t^{-k-1}\, dt,$$

und partielle Integration ergibt

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)|\, t^{-k-1} dt = t^{-k-1} \left[\int_{\frac{1}{n}}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \left[(k+1)\, t^{-k-2} \int_{\frac{1}{n}}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau\right] dt$$

$$< \delta^{-k-1} .\, \varepsilon \delta^{1+\alpha} + \varepsilon\,(k+1) \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{\alpha-k-1}\, dt \leqq \varepsilon n^{k-\alpha} + \varepsilon\,(k+1) \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{\alpha-k-1}\, dt.$$

Hieraus folgt

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \varphi(t) H_n(2t)\, dt\right| <$$

$$< \begin{cases} \varepsilon A_3 \left(n^{-\alpha} + \dfrac{k+1}{k-\alpha} n^{-k} \,.\, n^{k-\alpha}\right) = \varepsilon A_3 n^{-\alpha} \dfrac{2k-\alpha+1}{k-\alpha}, & \alpha < k \\ \varepsilon A_3 \left(n^{-k} + (k+1)\, n^{-k} \lg n\right), & \alpha = k. \end{cases}$$

Schliesslich ist nach (8b)

$$\left|\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\, H_n(2t)\, dt\right| \leqq \frac{A_2}{(2\delta)^{k+1}} \cdot \frac{1}{n^k} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)|\, dt < \frac{A_4}{n^k} \cdot \frac{1}{\delta^{k+1}} \,.$$

---

3) $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bedeuten nur von k abhängende Konstanten.

Es ist also für $n > n(\varepsilon)$

$$\left|\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right| n^\alpha < \varepsilon \,.\, A_5 \frac{2k-\alpha+1}{k-\alpha} \quad \text{für } \alpha < k,$$

$$\left|\frac{s_n^{(k)}}{c_n^{(k)}} - s\right| \frac{n^k}{\log n} < \varepsilon \,.\, A_6 \quad \text{für } \alpha = k.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \quad \text{für } \alpha < k,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\log n}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \quad \text{für } \alpha = k$$

Somit gilt der Satz:

I. *Es sei* $0 < k < 1$, $f(x)$ *integrierbar (L) und* $\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}$ *die* Cesàro*schen Mittel k-ter Ordnung ihrer* Fourier*schen Reihe; es sei* $0 \leqq \alpha \leqq k$; *wenn bei geeigneter Wahl von s*

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s|\,dt \to 0 \quad \text{für } h \to +0,$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \quad \textit{für } 0 \leqq \alpha < k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\log n}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \ \textit{für } \alpha = k.$$

Für $\alpha = 0$ erhält man die Hardysche Verallgemeinerung eines bekannten Lebesgueschen Satzes und den von Herrn M. Riesz hierfür gegebenen Beweis.[4])

Einen Satz, der etwas weniger besagt als I, hat auf ähnlichem Wege — anschliessend an meine unter 1a) zitierte Arbeit — Herr Alexits bewiesen.[5])

Ich habe den Fall $g = 0$ vorweggenommen, da der allgemeine Fall etwas umständlichere Rechnung erfordert. In einem Punkte lässt sich hier wie auch in § 1 die Rechnung vereinfachen; wir können nämlich die Zerlegung des Integrals (7) in drei Teile

---

[4]) M. Riesz a. a. O. [2]).

[5]) Das Manuskript seiner Arbeit hat mir zur Begutachtung seitens der Redaktion kürzlich (September 1926) vor dem endgültigen Abschluss meines Manuskripts vorgelegen.

vermeiden, ähnlich wie es Herr FEJÉR[6]) beim Beweise des LEBESGUEschen Satzes getan hat.

§ 2. *Der allgemeine Fall: g beliebig.*

Ich setze jetzt voraus, dass

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-gt^\alpha|\,dt \to 0 \text{ für } h\to 0.$$

Aus (7) folgt nun

$$(9)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^\alpha)\,H_n(2t)\,dt=\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s-\frac{2g}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha H_n(2t)\,dt;$$

die Abschätzung könnte zunächst wie beim Integral (7) vorgenommen werden. Man kann aber auch so schliessen:

Aus (8b) folgt

$$(tn)^{k+1}|H_n(t)|<A_2 n, \text{ oder } tn\,|H_n(t)|^{\frac{1}{k+1}}<A_7 n^{\frac{1}{k+1}},$$

ferner aus (8a)

$$|H_n(t)|^{\frac{1}{k+1}}<A_8 n^{\frac{1}{k+1}};$$

daher ist

$$(1+tn)\,|H_n(t)|^{\frac{1}{k+1}}<A_9 n^{\frac{1}{k+1}},$$

und schliesslich

$$(1+tn)^{k+1}|H_n(t)|<A_{10}n,\quad 0<t<\pi,\quad n=1,2,3,\dots$$

Nunmehr wird

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^\alpha)\;H_n(2t)\,dt\right|\leqq A_{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^\alpha)\,\frac{ndt}{(1+2tn)^{k+1}};$$

setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^t|\varphi(t)-gt^\alpha|\,dt=\Phi(t),$$

so erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(t)-gt^\alpha|\frac{ndt}{(1+2tn)^{k+1}}=\frac{n\Phi(t)}{(1+2tn)^{k+1}}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}}+2(k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\frac{n^2dt}{(1+2tn)^{k+2}}$$

---

[6]) L. FEJÉR, Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1925, p. 13–17. Vgl. auch die Abschätzung in meiner unter 1b) zitierten Arbeit.

$$= \frac{n\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(1+\pi n)^{k+1}} + 2(k+1)n^{1-\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(t)}{t^{1+\alpha}} \cdot \frac{(nt)^{1+\alpha}}{(1+2tn)^{k+2}}\,dt$$

$$\leqq \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n^k} + 2(k+1)n^{1-\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,.\,t^{-1-\alpha}\,.\,(1+2nt)^{\alpha-k-1}\,dt.$$

Nach Voraussetzung gibt es nun zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta < 1$, sodass

$$\Phi(t)\,.\,t^{-1-\alpha} < \varepsilon \text{ für } t < \delta = \delta(\varepsilon);$$

somit wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,t^{-1-\alpha}(1+2nt)^{\alpha-k-1}\,dt < \varepsilon\int_0^{\delta}(1+2nt)^{\alpha-k-1}\,dt +$$

$$+ (1+2n\delta)^{\alpha-k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,t^{-1-\alpha}\,dt$$

$$< \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k-\alpha}\cdot\dfrac{1}{2n} + (n\delta)^{\alpha-k-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,t^{-1-\alpha}\,dt \text{ für } \alpha < k \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{2n}\lg(1+2n) + (n\delta)^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,t^{-1-k}\,dt \text{ für } \alpha = k. \end{cases}$$

Also wird

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi(t) - gt^{\alpha})\,H_n(2t)\,dt\right| <$$

$$< \begin{cases} \dfrac{A_{11}}{n^k} + \dfrac{\varepsilon A_{12}}{k-\alpha}n^{-\alpha} + A_{13}\,n^{-k}\,\delta^{\alpha-k-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,t^{-1-\alpha}dt,\ \alpha < k \\[2ex] \dfrac{A_{11}}{n^k} + \varepsilon A_{14}n^{-k}\lg(1+2n) + A_{15}n^{-k}\delta^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\,t^{-1-k}dt,\ \alpha = k. \end{cases}$$

Hieraus und aus (9) folgt nun unmittelbar

$$(10a)\quad \lim_{n\to\infty} \left\{ n^{\alpha}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) - \frac{2g}{\pi} n^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} H_n(2t)\,dt \right\} = 0, \text{ für } \alpha < k,$$

$$(10b)\quad \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n^k}{\lg n}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) - \frac{2g}{\pi}\frac{n^k}{\lg n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k H_n(2t)\,dt \right\} = 0, \ \alpha = k.$$

Ich zeige nun, dass die Grenzwertbeziehung besteht

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} H_n(2t)\,dt = \frac{\pi}{2^{2+\alpha}} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\alpha+k)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}, \ 0 < \alpha \leq k < 1.$$

Nach einer bekannten Umformung folgt aus (6)

$$c_n^{(k)} H(t) = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(k-1)} \frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

also

$$c_n^{(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} H_n(2t)\,dt = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \frac{\sin(2\nu+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(k-1)} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1} \sin(2\nu+1)t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin(2\nu+1)t\,dt \right].$$

Ich zeige nun zunächst, dass

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = u(t) \text{ monoton wächst für } 0 < t < \frac{\pi}{2};$$

das heisst

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{\sin^2 t} > 0, \ 0 < t < \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\sin^2 t - t^2 \cos t > 0, \ 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Nun ist offenbar

$$\sin t > t - \frac{t^3}{6} > 0 \text{ für } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

und

$$\cos t < 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24},$$

also ist

$$\sin^2 t - t^2 \cos t > t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{36} - t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) =$$

$$= \frac{t^4}{6} - \frac{t^6}{12}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{t^4}{6}\left(1 - \frac{t^2}{12}\right) > 0,\ 0 < t < \frac{\pi}{2}. \text{ Qu. e. d.}$$

Erst recht ist nun

$$t^\alpha\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \text{ monoton wachsend für } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung wird nun

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin(2\nu+1)t\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\int_\zeta^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\nu+1)t\,dt,$$

wobei $0 < \zeta < \frac{\pi}{2}$ ist. Hieraus ergibt sich

$$(11) \qquad |I_\nu| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{|\cos(2\nu+1)\zeta|}{2\nu+1} < \frac{1}{2\nu+1}.$$

Ferner ist offenbar

$$B_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1}\sin(2\nu+1)t\,dt = \frac{1}{(2\nu+1)^\alpha}\int_0^{(2\nu+1)\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1}\sin t\,dt,$$

also

$$\lim_{\nu\to\infty} B_\nu \cdot (2\nu+1)^\alpha = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\sin t\,dt = \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}.^{7)}$$

Hieraus und aus (11) folgt

$$\lim_{\nu\to\infty}(2\nu+1)^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\frac{\sin(2\nu+1)t}{\sin t}dt = \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2},\ 0 < \alpha < 1,$$

---

[7]) Vgl. z. B. G. F. Meyer, Vorl. ü. die Theorie d. bestimmten Integrale, Leipzig 1871, p. 182.

und schliesslich mit Rücksicht auf (2) und auf einen Satz des Herrn Knopp[8])

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha H_n(2t)\,dt = \frac{\Gamma(k+1)}{2^{1+\alpha}\,\Gamma(k)}\,\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}.\,\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(k)}{\Gamma(1-\alpha+k)}$$

$$=\frac{1}{2^{1+\alpha}}\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.\,\sin\frac{\alpha\pi}{2}.\,\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\alpha+k)}\,{}^{9)}$$

oder

$$(12)\quad \lim n^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha H_n(2t)\,dt = \frac{\pi\,.\,\Gamma(1+k)}{2^{2+\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}.\,\Gamma(1+k-\alpha)},\quad 0<\alpha\leqq k<1.$$

Aus (10a), (10b) und (12) folgt nun der Satz:

II. *Es sei* $0<\alpha\leqq k<1$, *$f(x)$ integrierbar (L) und*

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-gt^\alpha|\,dt \to 0,\; h\to+0;$$

dann ist

$$(13a)\qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s\right)=g.\,\frac{\Gamma(1+k)}{2^{1+\alpha}\,\Gamma(1+k-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\;\textit{für}\ \alpha<k,$$

$$(13b)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{lg\,n}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s\right)=0 \qquad \textit{für}\ \alpha=k.$$

Für $k=1$ geht die Beziehung (13a) in Satz II. meiner unter 1b) zitierten Arbeit über, sodass also (13a) unverändert auch für $k=1$ gilt. Dagegen entspricht nach Satz I. derselben Arbeit der Beziehung (13b) für $k=1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lg n}\left(\frac{s_n^{(1)}(x)}{n+1}-s\right)=\frac{g}{2\pi}.$$

Das abweichende Verhalten im Falle $\alpha=k<1$ hängt damit zusammen, dass die Integrale

---

8) K. Knopp, Über Summen der Form $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, Rendiconti Circ. Matem. Palermo XXXII, 1911, p. 95—110; insbes. Satz VII.

9) Wegen $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$. — Eine andere Berechnung dieses Grenzwertes hat mir Herr Szegö brieflich mitgeteilt.

$$L_n^{(k)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k H_n(2t)\,dt, \quad \overline{L}_n^{(k)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k \,|H_n(2t)|\,dt$$

für $k < 1$ nicht dieselbe Grössenordnug haben[10]). Dagegen ist für $k = 1$ geradezu

$$L_n^{(1)} = \overline{L}_n^{(1)}.$$

Es lässt sich aber zeigen, dass auch in (13b) der Faktor $\dfrac{n^k}{lg\, n}$ durch keinen schwächer anwachsenden ersetzt werden kann. Ich komme hierauf an anderer Stelle zurück.

(*Eingegangen den 2. XII. 1926.*)

[10]) Man beachte, dass $H_n(t)$ von k abhängt und in Falle $k < 1$ kein konstantes Vorzeichen hat.

Involutions et surfaces continues.

Par B. de Kerékjártó (Szeged).

I. Involutions topologiques.

La notion de *l'involution topologique* a été introduite par M. Brouwer sous la forme suivante[1]:

Une involution topologique d'ordre n d'une surface F orientable et fermée est une distribution des points de F en systèmes de n points au plus de telle façon que ces systèmes soient en une correspondance topologique (c'est-à-dire biunivoque et bicontinue) avec les points d'une surface M orientable et fermée, appelée surface modulaire de l'involution. La continuité de la transformation des points de M en des systèmes de points de F veut dire qu'étant donné un point arbitraire P de M et une suite arbitraire de points $P_1, P_2, \ldots$ tendant vers P, les systèmes de points de M $(Q_1^i, Q_2^i, \ldots, Q_{m_i}^i)$ correspondant à P_i tendent pour $i \to \infty$ vers le système $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$ correspondant à P. A l'aide du théorème de Heine et Borel, on conclût de cela la continuité uniforme de la transformation.

M. Brouwer a démontré que *chaque involution topologique d'une surface orientable et fermée F représente F comme une surface superposée de la surface modulaire M, à n feuillets et à un nombre fini de points de ramification.*

Une autre définition de l'involution topologique (que j'ai indiquée dans une conférence au congrès de Bad-Nauheim en 1920) est la suivante:

Soit F une surface orientable et fermée, et soit donné une distribution des points de F en des systèmes de n points au plus satisfaisant aux conditions suivantes:

1) A chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'étant donné deux points arbitraires Q_1 et Q_1' à une distance $< \delta$, dont les homologues sont $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$ respectivement

[1] Proceed. of the Academy of Amsterdam, vol. XXI. (1919) p. 1143—1145.

$(Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{m'})$, chaque Q_i est à distance $< \varepsilon$ de $(Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{m'})$ et inversement. Nous disons tout court que la variation continue d'un point involve la *variation uniformément continue* de ses homologues.

2) Soit Q_1 un point qui a n points homologues différents; de la condition 1) il s'ensuit que lorsque Q_1 décrit une courbe simple et fermée suffisamment petite, chaque point homologue décrit une petite courbe simple et fermée qui n'ont l'une et les autres aucun point commun. Nous supposons que lorsque le point Q décrit la courbe dans le sens positif, chacun des points homologues décrit la courbe correspondante dans le sens positif. Nous disons alors que l'involution *conserve le sens d'orientation.*

La différence essentielle entre les deux définitions consiste en ce que la définition donnée par M. Brouwer fait intervenir la surface modulaire tandisque la nôtre ne dépend que de la surface donnée. — Soit par exemple $y = R(x)$ une fonction rationnelle de la variable complexe x (x et y varient sur une sphère); la définition donnée par M. Brouwer présente les relations qui existent entre les valeurs de la fonction y et celles de la variable x; la nôtre montre la liaison des valeurs homologues de la variable x, en appelant deux valeurs x_1 et x_2 homologues si la fonction $R(x)$ prend en x_1 et en x_2 la même valeur.

Pour l'équivalence des deux définitions, il suffit de démontrer qu'une involution topologique dans le sens de la deuxième définition n'a qu'un nombre fini de points *singuliers* (c'est-à-dire de points qui ont moins de n homologues). Considérons l'ensemble des points *réguliers* (c'est-à-dire des points qui ont n points homologues distincts); chaque point de cet ensemble est un point intérieur de l'ensemble, par conséquent l'ensemble des points réguliers consiste en un ou plusieurs domaines.

Soit Q un point singulier sur la frontière d'un domaine g formé de points réguliers. Désignons par $Q = Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_m$ les points homologues à Q et déterminons autour de chaque point Q_i une petite surface circulaire c_i telle que c_i et c_j $(i \neq j)$ n'ont aucun point en commun. D'après la condition 1) de notre définition, il y a un voisinage v de Q tel que chaque point de v a tous ses homologues dans les cercles c_i. Soit $\varkappa$ une circonférence autour de Q contenue dans v, soit P_1 un point de $\varkappa$ contenu dans g et soient $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ses homologues situés dans c_1. Supposons que la distance de P_1 et Q soit inférieure à celle de P_i et Q ($i=2, 3, \ldots, k$), (On peut le supposer sans aucune restriction.)

Désignons par $\{\varkappa\}$ l'ensemble de tous les points homologues aux points de $\varkappa$ qui sont contenus dans c_1. Nous allons montrer que $\{\varkappa\}$ *est d'un seul tenant*, excepté le cas où tous les points de $\{\varkappa\}$ autres que ceux de $\varkappa$ se trouvent à l'extérieur de $\varkappa$. Soit en effet R' un point arbitraire de $\{\varkappa\}$ et R un de ses homologues sur $\varkappa$; lorsqu'un point variable S décrit continuement un arc $R'P_1$ de la circonférence $\varkappa$, il y a pour chaque position du point S un point S' homologue à S qui décrit une courbe continue partant de R' jusqu'à un des points P_i. Si R' est intérieur à $\varkappa$ ou s'il se trouve sur $\varkappa$, cette courbe continue a un point au moins sur $\varkappa$. De là, il résulte que ou bien $\{\varkappa\}$ est d'un seul tenant ou tous les points de $\{\varkappa\}$ autres que les points de $\varkappa$ sont à l'extérieur de $\varkappa$.

Le domaine γ déterminé par $\{\varkappa\}$ et contenant le point Q est par conséquent simplement connexe ayant pour frontière un continu C (qui est un sous-ensemble de $\{\varkappa\}$).

Pour chaque point de γ il est vrai que tous ses homologues qui sont près de Q (c'est-à-dire dans c_1) appartiennent à la fois à γ. Soit en effet R_0 un point arbitraire de γ et soit R_0' un de ses points homologues dans c_1; lorsqu'un point variable S décrit dans γ un arc simple de R_0 jusqu'à Q, un point S' homologue à S décrit une courbe continue partant de R_0' jusqu'à Q; comme l'arc R_0Q ne rencontre aucun point de $\{\varkappa\}$, la courbe continue $R_0'Q$ n'a pas de points sur $\{\varkappa\}$, c'est-à-dire R_0' se trouve dans γ. Nous disons que le domaine γ est invariant pour l'involution, près de Q.

Prenons dans le domaine γ un polygon π et considérons l'ensemble $\{\pi\}$ de tous les homologues des points de π qui sont dans γ. Comme ci-dessus, on voit que le domaine γ' déterminé par C et $\{\pi\}$ a pour frontière deux continus C et C' (C' sous-ensemble de $\{\pi\}$) de telle sorte que γ est homéomorphe avec un domaine annulaire. Le domaine γ' est invariant pour l'involution prés de Q.

Soit donc R_1 un point de g sur C, soient $R_1, R_2, \ldots, R_k$ ses homologues sur C; soient $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des cercles sans points communs autour de ces points et soit u un voisinage de R_1 tel que ses homologues près de Q se trouvent à l'intérieur de $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — Construisons le polygone π de telle façon qu'il ait un point au moins dans le voisinage u; aussi C' a donc au moins un point dans u de telle sorte qu'on peut joindre un point de C à un point de C' par un segment droit l_1 dans u. Les homologues des points de l_1 près de Q forment par conséquent k arcs simples $l_1, l_2, \ldots, l_k$ dans γ' joignant C et C' et qui n'ont deux à deux aucun point commun. Les arcs l divisent le domaine annulaire γ' en k parties telles qu'aucune d'elles ne contient deux points homologues. De là, il résulte que l'involution de γ' en soi-même est homéomorphe à une rotation du domaine annulaire[2]). Si nous joignons dans γ' un point de l_1 avec son homologue sur l_2 sans rencontrer d'ailleurs $l_1, l_2, \ldots, l_k$, nous obtenons un arc simple qui forme ensemble avec tous ses homologues dans γ' une courbe simple et fermée c invariante pour l'involution près de Q.

De la même façon, on peut construire une suite de courbes simples et fermées $c_1, c_2, \ldots$ chacune invariante pour l'involution près de Q, telles que pour chaque i: c_{i+1} soit intérieur à c_i et que $c_1, c_2, \ldots$ tendent vers le seul point Q. En joignant un point de c_i à un point de c_{i+1} entre ces deux courbes par un arc convenablement choisi, on obtient par cet arc et par tous ses homologues entre c_i et c_{i+1} une division de ce domaine anulaire en k parties qui se correspondent par l'involution près de Q. Le même est donc vrai pour deux courbes c_i et $c_{i+i'}$. Par conséquent, *le point singulier Q est isolé et l'involution près de Q est homéomorphe avec une rotation.*

II. Involutions continues et courbes continues.

Notre définition de l'involution topologique donné au numéro précédent nous amène à quelques généralisations de cette notion. En appelant involutions topologiques à *indicatrice invariable* celles qui satisfont à nos conditions 1) et 2) et involutions topologiques *générales* (d'ordre fini) celles qui satisfont à la condition 1) (sans avoir nécessairement la propriété 2)), on a une notion applicable aux surfaces orientables ou non-oriantables pour laquelle un résultat analogue à celui du numéro précédent, c'est-à-dire au *théorème d'involution* dû à M. Brouwer, peut se déduire par les théorémes de rotation et de réflexion[2]). Ensuite en considérant des surfaces ouvertes, on définit des involuti·ns topologiques d'ordre fini ou

[2]) Mathem. Annalen, Bd. 80. (1919), S. 36—41, ou Kerékjártó, Vorl. ü. Topologie, I. (Berlin, 1923), S. 223—226.

infini; à l'aide de cette notion, on peut caractériser la distribution des valeurs des fonctions automorphes, comme M. BROUWER a montré[3]).

Une autre généralisation de la notion de l'involution topologique nous amène à la notion suivante de *l'involution continue:*

Une involution continue d'une surface F (ou d'une ligne L) est une distribution des points de F (ou de L) en des systèmes de points qui varient continuement avec chacun de leurs points.

La variation continue signifie que pour un point arbitraire P dont les homologues sont $\{P\}$ et pour un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire, il y a un nombre $\delta > 0$ tel qu'étant Q n'importe quel point à distance $< \delta$ de P, chaque point Q' homologue à Q a une distance $< \varepsilon$ de $\{P\}$. Bien entendu, la continuité n'est pas nécessairement uniforme; il y a en général des points P' homologues à P dont le ε-voisinage ne contient aucun point Q' homologue à Q; seulement tous les points Q' homologues à Q sont contenus dans les ε-voisinages des points de $\{P\}$ si la distance PQ est $< \delta$.

Si Q est un point arbitraire qui n'appartient pas à $\{P\}$ et qui n'est pas un point d'accumulation de $\{P\}$, aucun point P de $\{P\}$ ne peut être point d'accumulation de $\{Q\}$. Soit en effet P un point de $\{P\}$ dont nous supposons qu'il soit point d'accumulation de $\{Q\}$; comme Q n'appartient ni à $\{P\}$ ni à son ensemble dérivé, il y a un voisinage de $\{P\}$ qui ne contient pas le point Q; mais chaque voisinage de P contient des points homologues à Q, ce qui est une contradiction à la condition de continuité. De là il s'ensuit qu'ou bien le système $\{Q\}$ est un ensemble fermé de points — cas qui nous intéresse particulièrement — ou bien il y a un autre système $\{P\}$ tel que $\{P\}$ et $\{Q\}$ sont tous les deux partout denses relativement au même ensemble fermé dont ils sont des sous-ensembles. Un exemple pour la deuxième possibilité est fourni par la distribution des points du plan en deux systèmes, l'un contenant tous les points à coordonnées rationnelles, l'autre tous les autres points du plan.

L'intérêt des involutions continues consiste en ce que *chaque transformation univoque et continue d'une surface ou d'une ligne conduit à une involution continue* pour laquelle deux points sont considérés comme homologues s'ils ont la même image et alors

[3]) M. BROUWER avait la bonté de me communiquer ses résultats non publiés sur ce sujet en des lettres en 1919.

seulement. De la continuité de la transformation il s'ensuit que *chaque système de points homologues forme un ensemble fermé de points*.

On appelle *courbe continue* l'image univoque et continue de l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. On entend par une *surface continue* l'image univoque et continue d'une surface simple; nous considérons seulement le cas ou cette dernière surface est une sphère, ce qui n'est aucune restriction du point de vue des considérations suivantes.

Le premier problème qui se présente est de caractériser les ensembles de points qui peuvent être images univoques et continues d'un segment (ou d'une sphère); sa solution a été donnée par les beaux théorèmes de MM. Hahn et Mazurkiewicz et de M. Sierpiński [4]). Comme on peut transformer la sphère en un segment et le segment en une sphére par des tranformations univoques et continues, il n'y a aucune différence, concernant leur structure comme ensembles de points, entre les courbes et les surfaces continues.

Pour l'identité de deux courbes, il ne suffit pas que les ensembles de points formés par l'une et par l'autre courbe soient identiques. Comme M. Fréchet[5]) a nettement formulé par une notion géométrique, une courbe continue est une „trajectoire" où l'on tient compte de l'ordre dans lequel les points se présentent sur la courbe. Considérons une courbe continue dans l'espace avec les coordonnées $(x, y, \ldots, z)$; les coordonnées d'un point variable de la courbe s'expriment par les fonctions

$$x = f(t),\ y = g(t),\ \ldots,\ z = h(t)$$

qui sont uniformes et continues dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Supposons qu'il n'y a aucun intervalle (t_1, t_2) où toutes les fonctions $f(t), g(t), \ldots, h(t)$ sont à la fois constantes. A chaque valeur de t correspond un et un seul point de la courbe; mais des points de la courbe correspondant à des valeurs différents du paramètre t peuvent coincider dans l'espace; nous les considérons comme des points différents de la courbe, et le point dans lequel ils coïncident dans l'espace comme un point multiple de la courbe. Deux courbes continues sont considérées comme identiques si

4) voir, par exemple, Kerékjártó, Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar Hamburg, Bd. IV. (1925) S. 164—167. où aussi la litérature est citée.

5) M. Fréchet, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo, t. XXII. (1906) p. 51. et suiv.

non seulement les deux ensembles de points fournis par les deux courbes coïncident, mais aussi ces points sont rencontrés dans le même ordre par les deux courbes lorsqu'on fait varier le paramétre de 0 à 1. Une expression analytique pour cette identité est la suivante: soit la deuxième courbe représentée par les fonctions:

$$x = F(u),\ y = G(u),\ \ldots,\ z = H(u)\ ;\ (0 \leqq u \leqq 1)$$

dont nous supposons qu'elles ne sont toutes constantes dans aucun intervalle (u_1, u_2); les deux courbes sont identiques s'il y a une transformation biunivoque et bicontinue de l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ en l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$ définie par $u = u(t)$ telle qu'on a

$$F(u(t)) = f(t),\ G(u(t)) = g(t), \ldots,\ H(u(t)) = h(t)$$

identiquement pour t.

Jusqu'ici, nous avons supposé qu'il n'y a aucun intervalle de t (ou de u) où toutes les fonctions $f, g, \ldots, h$ (respectivement $F, G, \ldots, H$) sont constantes. S'il y a un tel intervalle (nécessairement fermé), nous devons considérer le point correspondant comme un seul point de la courbe et non comme un point multiple. Si l'on réussit donc de transformer l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ en l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$ par une transformation univoque et continue, de telle sorte qu'à chaque intervalle de t où $f, g, \ldots, h$ sont constantes, correspond un seul point u mais deux points arbitraires t_1 et t_2 qui n'appartiennent pas à un intervalle de cette sorte, ont pour images deux points différents u_1 et u_2. on peut introduire u comme nouveau paramètre; la courbe sera donc repésentée dans cette représentation paramétrique de telle façon qu'à aucun intervalle du paramètre ne correspond un seul point de la courbe. M. Fréchet a montré que cela est toujours possible[5]; il a démontré qu'étant donné un ensemble arbitraire d'intervalles fermés sans points communs, on peut construire une fonction uniforme et continue jamais décroissante qui n'est constante que dans les intervalles de l'ensemble donné. La raison en est simplement que l'ensemble complémentaire d'un intervalle sur la ligne droite est homéomorphe à l'ensemble complémentaire d'un seul point sur la ligne droite.

La *distance paramétrique de deux courbes continues* a été définie par M. Fréchet comme la borne inférieure des maxima

$$\max_{(0 \leqq t \leqq 1)} \left\{ [F(u(t)) - f(t)]^2 + [G(u(t)) - g(t)]^2 + \ldots + [H(u(t)) - h(t)]^2 \right\}^{1/2}$$

pour toutes les homéomorphies $u = u(t)$ entre les intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ et $0 \leqq u \leqq 1$.

III. Représentations paramétriques des surfaces continues.

Nous entendons par une *surface continue* F l'image univoque et continue d'une sphère S. En appelant deux points de S homologues s'ils ont la même image, nous obtenons une involution continue de S où chaque système de points homologues forme un ensemble fermé de points.

Considérons d'abord le cas où chaque système de points homologues forme un *ensemble discontinu*, en d'autres mots, supposons qu'il n'y a sur S aucun continu (contenant deux points au moins) qui est transformé en un seul point. Soient (u, v) des coordonnées sur la sphère et soient $x, y, \ldots, z$ les coordonnées des points d'un espace à un nombre fini de dimensions. La surface F située dans cet espace s'exprime par les fonctions uniformes et continues:

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ \ldots,\ z = h(u, v).$$

Nous avons donc supposé qu'il n'y a aucun vrai continu sur la sphère sur lequel toutes ces fonctions sont constantes. Si l'on désigne par

$$u = u(s, t),\ v = v(s, t)$$

une homéomorphie de la sphère en elle-même, et l'on mette

$$F(s, t) = f(u(s, t), v(s, t)),$$

$$G(s, t) = g(u(s, t), v(s, t)), \ldots, H(s, t) = h(u(s, t), v(s, t)),$$

nous convenons de dire que les fonctions

$$x = F(s, t),\ y = G(s, t),\ \ldots,\ z = H(s, t)$$

représentent *la même surface continue en une autre représentation paramétrique*. Dans le cas spécial traité pour le moment, nous considérons donc deux surfaces continues comme identiques s'il y a une homéomorphie entre les points des deux sphères représentantes qui fait correspondre à un point quelconque de l'une des sphéres un point de l'autre qui ont tous les deux le même point pour image sur la surface continue.

Soient F et F' deux surfaces continues représentées respectivement par les fonctions

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ \ldots,\ z = h(u, v)$$

et

$$x = F(s, t),\ y = G(s, t),\ \ldots,\ z = H(s, t)$$

Soit $s = s(u, v)$, $t = t(u, v)$ une homéomorphie entre les sphères S et S' dont F et F' sont des images univoques et continues, et considérons la plus grande distance de deux points de F et F'

qui sont les images de deux points de S et S' correspondants par l'homéomorphie; considérons donc le maximum de

$$\{[F(s(u,v),t(u,v))-f(u,v)]^2+ [G(s(u,v),t(u,v))-g(u,v)]^2+\ldots+[H(s(u,v),t(u,v))-h(u,v)]^2\}^{1/2}.$$

La borne inférieure de ces maxima pour toutes les homéomorphies entre S et S' est appelée d'aprés M FRÉCHET la *distance paramétrique des deux surfaces continues*[6]).

La définition de la distance paramétrique est indépendente de la circonstance s'il y a sur S ou S' des continus auxquels correspond sur F ou sur F' un seul point. C'est ainsi que M. FRÉCHET a défini l'identité de deux surfaces continues par la condition que leur distance paramétrique soit égale à zéro[6]). En d'autres mots, *deux surfaces F et F', images univoques et continues des sphères S et S' sont considérées comme identiques s'il y a des homéomorphies entre S et S' telles que la plus grande distance de deux points de F et F' qui sont les images de deux points de S et S' correspondants par l'homéomorphie, est aussi petite que l'on veut.* Cette définition analytique est élégante mais elle est bien artificielle, et M. FRÉCHET ne l'a adopté que pour des raisons de brièveté. Mais il ne cachait pas ses préférences pour une définition qui mettrait en évidence la nature géométrique de l'identité de deux surfaces continues générales. — Je donne, dans ce qui suit, une définition géométrique pour l'identité de deux surfaces, laquelle me paraît bien naturelle et qui est bien conforme à son avis même (voir les numéros 2 et 3 de son mémoire cité [6])).

Soit F une surface continue générale donnée par une transformation univoque et continue t d'une sphére S. La surface continue F est déterminé d'une part par l'ensemble E des points de l'espace qui correspondent aux points de S par la transformation t, d'autre part par *les voisinages des points de F sur F.* — Les images de deux points différents P_1 et P_2 de la sphère S sont considérées comme *identiques* sur F s'il y a sur la sphère S un *ensemble d'un seul tenant*[7]) qui contient P_1 et P_2 et dont l'image par t est un seul

[6]) M. FRÉCHET, Sur la distance de deux surfaces, Annales de la Soc. Polonaise de Mathém. (1924).

[7]) On entend par un ensemble *d'un seul tenant* un ensemble qui n'est pas la somme de deux vrais sous-ensembles sans points communs et tels qu'aucun point d'un de ces sous-ensembles ne soit point d'accumulation de l'autre.

point; autrement elles représentent deux points *différents* de F. Deux points différents de F sont des points *distincts* de F lorsqu'ils sont situés en deux points différents de l'ensemble E; autrement ils sont différents sur F mais *coïncidants* sur E, c'est-à-dire ils donnent des points multiples de F. — Une suite de points différents $P_1, P_2, \ldots$ de F tend vers le point P de F si chaque suite de points $P'_1, P'_2, \ldots$, où P'_i a par t une image identique à P_i, a pour points d'accumulation seulement tels points de S dont les images sont identiques à P. Par cette définition de limite, les voisinages des points de F sur F sont déterminés.

Pour éclairer mieux cette relation de limite ou de voisinage, nous reprenons la sphère S, dont F est l'image par la transformation t, et distribuons les points de S en des „*éléments* $\mathfrak{P}$" de la façon suivante: deux points de S appartiennent au même élément $\mathfrak{P}$ s'il y a un ensemble d'un seul tenant qui les contient et dont l'image par t est un seul point; autrement ils appartiennent à deux éléments différents. De cette façon, la sphère est divisée en un ensemble d'éléments $\mathfrak{P}$; chaque élément est un ensemble fermé d'un seul tenant, c'est-à-dire un continu (qui peut consister aussi d'un seul point)[8]). A chaque élément $\mathfrak{P}$ correspond un point de F et un seul; deux points de F sont considérés comme des points différents de F s'ils correspondent à deux éléments différents. — Nous disons que les éléments $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ ... tendent vers l'élément $\mathfrak{P}$ si la distance (ordinaire) des ensembles $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{P}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$[9]). Ainsi, il y a une homéomorphie entre les points de F et les éléments de S.

---

[8]) La distribution des points de S en des éléments $\mathfrak{P}$ de la façon décrite dans le texte est une involution continue; cette proposition s'obtient immédiatement à l'aide du théorème de Schoenflies-Zoretti (voir par exemple Kerékjártó, Vorl. ü. Topologie, I, 1923, S. 38).

[9]) D'après cette définition, l'ensemble des éléments $\mathfrak{P}$ forme un espace (L); on peut y définir la limite par l'intermédiaire d'un écart non régulier si on entend par l'écart $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ de deux éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ la distance ordinaire des ensembles de points $\mathfrak{P}_1$. $\mathfrak{P}_2$. Dans cet espace, *chaque ensemble dérivé est fermé.* Soit, en effet, $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ une suite d'éléments ayant un élément $\mathfrak{P}_\omega$ pour limite et soit pour chaque ν: $\mathfrak{P}_1^{(\nu)}, \mathfrak{P}_2^{(\nu)} \ldots$ une suite ayant $\mathfrak{P}_\nu$ pour limite; il faut montrer l'existence d'une suite „diagonale" $\mathfrak{P}_{n_1}^{(1)}, \mathfrak{P}_{n_2}^{(2)}, \ldots$ tendant vers $\mathfrak{P}_\omega$. Désignons par $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\omega]$ la distance maximum d'un point variable de $\mathfrak{P}$ de l'ensemble $\mathfrak{P}_\omega$; il est facile à montrer que pour chaque $\epsilon > 0$ il y a un $\delta > 0$ tel que pour un élément $\mathfrak{P}$ quelconque pour lequel

Nous disons que deux surfaces continues F et F', images univoques et continues des sphères S et S', appartiennent au *même type* ou qu'elles sont *homéomorphes* s'il est possible d'établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les ensembles d'éléments $(\mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{P}')$ de S et de S' qui leur correspondent. Dans ce cas il y a une homéomorphie entre les points de F et F' par laquelle deux points différents de F correspondent toujours à deux points différents (non nécessairement distincts) de F' et inversement. — Par exemple, toutes les surfaces continues représentées par des fonc ions qui ne sont toutes constantes sur aucun vrai continu de la sphère, appartiennent, d'après cette définition, au même type[10]).

Nous disons que deux éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ de S sont *homologues* si les points de F qui leur correspondent, sont coïncidents. En formant les systèmes d'éléments homologues, on obtient une *involution pour les éléments* $\mathfrak{P}$ de S qui est une involution continue dans le sens qu'à chaque élément $\mathfrak{P}$ dont les homologues sont $\{\mathfrak{P}\}$, et à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel qu'étant $\mathfrak{R}$ un élément à distance $< \delta$ de $\mathfrak{P}$, chaque élément homologue à $\mathfrak{R}$ a une distance $< \varepsilon$ de $\{\mathfrak{P}\}$. Chaque système d'éléments homologues forme un ensemble fermé d'éléments qui est à la fois un ensemble fermé de points.

Soient S et S' deux sphères; sur chacune d'elles soit donné une décomposition en un ensemble d'éléments fermés et pour chacun de ces ensembles d'éléments soit donné une involution continue; nous appelons les deux *involutions homéomorphes* s'il y a une homéomorphie entre les ensembles d'éléments qui fait correspondre à deux éléments homologues quelconques deux éléments homologues de l'autre ensemble.

$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\omega) < \delta$, on a $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\omega] < \epsilon$; en désignant $[\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{P}_\omega]$ par ϵ_ν, on voit donc que $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \rightarrow 0$, Prenons pour chaque ν un élément $\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}$ pour lequel $(\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}, \mathfrak{P}_\nu) < \epsilon_\nu$; il s'ensuit que $(\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}, \mathfrak{P}_\omega) \leqq (\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}, \mathfrak{P}_\nu) + [\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{P}_\omega] < 2\,\epsilon_\nu$; c'est-à-dire la suite $\mathfrak{P}^{(1)}_{n_1}, \mathfrak{P}^{(2)}_{n_2}, \ldots$ tend vers $\mathfrak{P}_\omega$.

[10]) C'est dans ce sens que les deux surfaces continues mentionnées à la fin de ma note „On parametric representations of continuous surfaces", (Proc. Nat. Acad. Sc., Washington, v. 10 (1924) p. 267—271) appartiennent au même type.

Si les surfaces continues F et F' engendrent des involutions homéomorphes sur les sphères S et S', nous disons que *les surfaces continues F et F' sont topiquement homéomorphes.* On voit que dans le cas d'une homéomorphie topique entre F et F', il y a une transformation biunivoque et bicontinue entre F et F' qui fait correspondre à deux points distincts de F toujours deux points distincts de F' et inversement; l'homéomorphie topique fournit donc une homéomorphie entre les ensembles de points E et E' (définis à la page 57).

Deux surfaces continues F et F' sont identiques s'il y a une homéomorphie topique entre F et F' qui fournit la transformation identique de E en E'. Cela veut dire en tout au longue que les ensembles d'éléments correspondant sur S et sur S' à F respectivement à F', peuvent être mis en une correspondance biunivoque et bicontinue de telle façon qu'un élément quelconque de S et l'élément lui correspondant sur S' ont le même point de l'espace pour image. Les transformations de S et de S' en $F \equiv F'$ donnent *la même surface continue en deux différentes représentations paramétriques.*

Notre prochain but est de démontrer *l'équivalence de notre définition géométrique* pour l'identité de deux surfaces continues *avec la définition analytique due à* M. Fréchet, donnée au début de ce numéro.

Soient S et S' deux sphères, F et F' deux surfaces continues, images de S respectivement de S' par les transformations t respectivement t'; supposons qu'il y a une suite d'homéomorphies $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ entre S et S' telles que deux points de S et de S' correspondants par σ_n ont pour images par t respectivement par t' des points dont la distance est inférieure à ε_n ($\varepsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$). — Soit $M = (P_1, P_2, \ldots)$ un ensemble dénombrable de points de S partout dense sur S. On peut extraire de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ une suite $\sigma_{n^{(1)}}, \sigma_{n_2^{(1)}}, \ldots$ $(1 < n^{(1)} < n_2^{(1)} < \ldots)$ qui est convergente dans le point P_1 (cela veut dire que les images de P_1 par ces homéomorphies ont un seul point limite sur S'). De la dernière suite, on peut extraire une suite $\sigma_{n^{(2)}}, \sigma_{n_2^{(2)}}, \ldots$ $(n^{(1)} < n^{(2)} < n_2^{(2)} < \ldots)$ qui est convergente dans le point P_2; et ainsi de suite. On obtient une suite $\sigma_{n^{(1)}}, \sigma_{n^{(2)}}, \sigma_{n^{(3)}}, \ldots$, que nous désignons simplement par $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}, \ldots$, qui est convergente dans tous les points de l'ensemble M. — Soit $P^{(\omega)}$ un point arbitraire de S et soit $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$

une suite de points de M tendant vers $P^{(\omega)}$; soit $l^{(1)}$ un arc simple avec les extrémités $P^{(1)}$ et $P^{(\omega)}$, passant par les points $P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots$ dans cet ordre; désignons par $l^{(k)}$ l'arc $P^{(k)}P^{(\omega)}$ de $l^{(1)}$. L'image de $l^{(k)}$ par l'homéomorphie $\sigma_{(n)}$ est un arc simple $l_n^{(k)}$; l'ensemble limite de $l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots$ est un continu $l_\omega^{(k)}$, d'après le théorème de Schoenflies-Zoretti. Le continu $l_\omega^{(k+1)}$ est un sous-ensemble du continu $l_\omega^{(k)}$; soit $l_\omega^{(\omega)}$ l'ensemble de tous les points appartenants à chaque $l_\omega^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $l_\omega^{(\omega)}$ est évidemment un continu. L'image de $l^{(k)}$ par t et l'image de $l_n^{(k)}$ par t' ont une distance paramétrique $< \varepsilon_n$, et comme $\varepsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$, il résulte que $l^{(k)}$ et $l_\omega^{(k)}$ ont la même image. Par conséquent, l'ensemble $l_\omega^{(\omega)}$ a la même image que $P^{(\omega)}$, en d'autres mots, $l_\omega^{(\omega)}$ appartient à un élément de S'. En désignant par $P_n^{(\omega)}$ l'image de $P^{(\omega)}$ par $\sigma_{(n)}$, on voit que tous les points d'accumulation de l'ensemble $(P_1^{(\omega)}, P_2^{(\omega)}, \ldots)$ appartiennent á $l_\omega^{(\omega)}$. — Le résultat que nous venons d'obtenir, est que la limite $\sigma_{(\omega)}$ de la suite $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \ldots$ fait correspondre à chaque point $P^{(\omega)}$ de S tels points de S' qui appartiennent à un élément $\mathfrak{P}'$ de S'. En faisant varier la suite des points de M dont $P^{(\omega)}$ est la limite, on voit l'indépendence de $\mathfrak{P}'$ du choix spécial de la suite des points de M tendants vers $P^{(\omega)}$. Ainsi à chaque point de S, la limite $\sigma_{(\omega)}$ fait correspondre un élément de S'. A deux points appartenants au même élément de S correspond le même élément de S'; on conclut cette proposition immédiatement du théorème de Schoenflies-Zoretti. Ensuite, il est évident (en considérant les inverses de $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \ldots$) que deux éléments différents de S ont pour images deux éléments différents de S' et que la correspondance biunivoque entre les éléments de S et de S' ainsi obtenue, est bicontinue. Nous avons donc *une homéomorphie entre les éléments de S et ceux de S' telle que des éléments correspondants de S et de S' ont par t respectivement par t' la même image.*

Nous allons démontrer que la distance paramétrique de deux surfaces qui sont identiques d'après la définition géométrique, est zéro. Soit H une homéomorphie entre les éléments de S et de S' telle que deux éléments correspondants quelconques ont par t respectivement par t' la même image sur $F \equiv F'$; le probléme est de déterminer une homéomorphie h entre les points de S et de S' telle que les images par t respectivement par t' de deux points correspondants quelconques ont une distance $< \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre positif arbitraire, donné d'avance.

Nous entendons par un $\mathfrak{P}$-*domaine* un ensemble d'éléments qui est d'un seul tenant et dont chaque élément est un élément intérieur; chaque $\mathfrak{P}$-domaine est à la fois un domaine de points. La $\mathfrak{P}$-*frontière* d'un $\mathfrak{P}$-domaine est l'ensemble de tous les éléments d'accumulation du $\mathfrak{P}$-domaine qui ne lui appartiennent pas; la $\mathfrak{P}$-frontière d'un $\mathfrak{P}$-domaine est un ensemble *fermé* d'éléments[11]). Un $\mathfrak{P}$-*continu* est, par définition, un ensemble d'éléments fermé et d'un seul tenant. — On voit immédiatement que par l'homéomorphie H, chaque $\mathfrak{P}$-continu sur S est transformé en un $\mathfrak{P}$-continu sur S'; chaque $\mathfrak{P}$-domaine sur S est transformé en un $\mathfrak{P}$-domaine sur S', la $\mathfrak{P}$-frontière du $\mathfrak{P}$-domaine a pour image la $\mathfrak{P}$-frontière du $\mathfrak{P}$-domaine correspondant.

Déterminons autour de chaque élément de S un $\mathfrak{P}$-*voisinage* dont l'image par la transformation t soit de diamètre $< \varepsilon/8$; d'aprés le théorème de Heine-Borel, il y a un nombre fini parmi ces voisinages, que nous désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_j$, couvrant toute la sphère S. Soit V_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, j$) l'ensemble de tous les éléments de U_ν qui ne sont pas éléments d'accumulation de $U_1, U_2, \ldots, U_{\nu-1}$; soient $V_1, V_2, \ldots V_k$ ceux parmi ces ensembles qui ne sont pas vides. Pour simplifier le raisonnement, nous ne considérons que le cas où chaque V_ν est d'un seul tenant.[12]) Les $\mathfrak{P}$-domaines $V_1, V_2, \ldots, V_k$ n'ont deux à deux aucun élément commun; chaque élément de S appartient à un de ces domaines ou à la frontière d'un tel domaine. Nous considérons maintenant les V_ν comme domaines de points et nous les désignons par $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Dans chaque domaine D_ν, nous construisons une approximation polygonale de D_ν en distance $< \delta$, où $\delta > 0$ désigne un nombre tel que deux points quelconques de S en distance $< \delta$ ont des images par t en distance $< \varepsilon/8$; nous

---

11) voir la note[9]).

12) En général, l'ensemble $V_1 + V_2 + \ldots + V_k$ considéré comme ensemble de points, consiste en un nombre fini ou en une infinité dénombrable de domaines; si $\delta > 0$ est un nombre arbitraire, il n'y a qu'un nombre *fini* parmi ces domaines contenant des points en distance $> \delta$ de la frontière. Nous considérons ces domaines $W_1, W_2, \ldots, W_l$ au lieu de $V_1, V_2, \ldots, V_k$, tandisque les autres seront ajoutés aux frontières de $W_1, W_2, \ldots, W_l$.

pouvons supposer que les domaines polygonaux $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ ainsi obtenu ont pour frontières des polygones simples n'ayant deux à deux aucun point commun. L'ensemble des points de S n'appartenant à aucun des domaines Δ_ν forme un nombre fini de domaines polygonaux que nous appelons „*canaux*". Nous divisons chaque canal en un nombre fini de domaines polygonaux Γ_μ tels qu'aucun Γ_μ ne soit voisin de deux domaines Δ_ν et $\Delta_{\nu'}$ non adjacents (nous appelons Δ_ν et $\Delta_{\nu'}$ adjacents si les $\mathfrak{P}$-frontières de V_ν et $V_{\nu'}$ ont un élément commun). Cette division sera construite de la façon suivante: soit $\mathfrak{P}_0$ un élément qui appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière de $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $(s \geqq 3)$; dans chacun des domaines D_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, nous prenons une ligne continue λ_ν qui a un point de $\mathfrak{P}_0$ pour point d'accumulation; les éléments de V_ν et da sa $\mathfrak{P}$-frontière qui contiennent les points et les points d'accumulation de λ_ν forment un $\mathfrak{P}$-continu $\mathfrak{K}_\nu$; soit K_ν le domaine formé de tous les points de S dont la distance de $\mathfrak{K}_\nu$ est inférieure à δ. Nous joignons un point P_0 de $\mathfrak{P}_0$ dans K_ν avec un point de la frontière de Δ_ν par une ligne polygonale l_ν; nous construisons ces lignes $l_1, l_2, \ldots, l_s$ de telle façon qu'elles n'ont pas des points communs sauf leur extrémité commune P_0 et qu'elles soient contenues dans le canal à part leurs autres extrémités. — En appliquant la même opération par rapport à un autre élément $\mathfrak{P}_1$, et ainsi de suite, en faisant attention que les lignes obtenues $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n'aient pas des points communs, on obtient une division du canal de la sorte anoncée. (Si q est le nombre de connexion du canal, on obtient la division cherchée en appliquant $2q-4$ fois au plus, l'opération ci-dessus, comme il résulte du théorème d'Euler). Il est évident de notre construction que chaque domaine Δ_ν et Γ_μ a pour image par t des ensembles de diamètre $< \varepsilon/2$.

Les images de $V_1, V_2, \ldots, V_k$ par l'homémorphie H sont les $\mathfrak{P}$-domaines $V'_1, V'_2, \ldots, V'_k$ sur S' qui n'ont deux à deux aucun point commun; chaque élément de S' appartient à un de ces $\mathfrak{P}$-domaines ou à sa frontière. Soit D'_ν le domaine des points appartenants aux éléments de V'_ν; D_ν et D'_ν ont le meme nombre de connexion. Soit $\delta' > 0$ un nombre tel que deux points quelconques de S' en distance $< \delta'$ ont des images en distance $< \varepsilon/8$. Nous construisons une approximation de D'_ν par un domaine polygonale Δ'_ν homéomorphe à Δ_ν, de telle façon qu'à chaque polygone π de Δ_ν correspond un polygone π' de Δ'_ν et à la partie de la $\mathfrak{P}$-frontière de V_ν extérieure à π' correspond par l'homéomorphie H la partie de la $\mathfrak{P}$-frontière de V'_ν extérieure à π'. A chaque canal sur S correspond un canal sur S' ayant le même nombre de connexion. — La division des canaux sur S' se définit au moyen des images de $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{K}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), etc., par l'homéomorphie H. Par une δ'-approximation de $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2, \ldots, \mathfrak{K}'_s$ etc., on obtient les lignes $l'_1, l'_2, \ldots, l'_s$ etc. qui donnent une division des canaux de S' en des domaines de la même nature que ci-dessus par rapport à S. Le réseau ζ sur S formé par les frontières de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ et par les lignes $l_1, l_2, \ldots, l_n$ est *isotope*[13]) au réseau ζ' sur S' formé par les frontières des domaines $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_k$ et par les lignes $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$. A chaque domaine d sur S déterminé par ζ correspond un domaine d' sur S' déterminé par ζ'; l'image de d par t et l'image de d' par t' ont des diamètres $< \varepsilon/2$; ces deux images ont au moins on point commun, d'aprés la construction correspondante des domaines. Si on étend l'isotopie entre ζ et ζ' à une transformation topologique de toute la sphère S en toute la sphère S', on obtient, par conséquent, *une homéomorphie h entre les points de S et de S' telle que deux points quelconques correspondants par h ont des images en distance $< \varepsilon$.*

Ainsi, il est démontré que les deux définitions pour l'identité de deux surfaces sont équivalentes. — Nous ferons encore quelques remarques qui se rattachent aux notions géométriques données ci-dessus.

D'après notre classification, l'ensemble de toutes les surfaces continues (ce sont les images univoques et continues de la sphère) est divisé en plusieurs types; deux surfaces appartiennent au même type (ou elles sont homéomorphes) s'il y a une homéomorphie entre leurs points, qui fait correspondre à deux points différents quelconques deux points différents. Un type se divise en plusieurs classes; deux surfaces homéomorphes appartiennent à la même classe (ou elles sont topiquement homéomorphes) s'il y a une homéomorphie entre leurs points conservant les relations de coïncidence. — On pourrait définir les relations de limite, la distance

13) Isotope veut dire ici: isotope dans le sens combinatoire; dans le cas présent, c'est équivalent à la notion (moins restrictive) donnée à la page 7 de mon livre cité sous 2), en supposant pour un moment que les sphères S et S' coïncident.

paramétrique, etc, d'abord pour les surfaces appartenant à une classe, ensuite pour celles appartenant à un type et enfin pour toutes les surfaces continues. La considération d'une classe de surfaces montre de ce point de vue peu d'intérêt; il s'agit, en somme, d'une combinaison des remarques suivantes concernant un type de surfaces et des résultats sur la distance de deux ensembles de points. — Pour deux surfaces appartenant au même type, on définit leur distance paramétrique (spéciale) comme la borne inférieure de la distance maximum de deux points correspondants, pour toutes les homéomorphies entre leurs points. Des raisonnements développés sur les pages 62—64, il s'ensuit que chaque homéomorphie entre les points des deux surfaces peut être approchée par une homéomorphie entre les points de leurs sphères représentantes[14]); la distance paramétrique spéciale est par conséquent égale à la distance paramétrique ordinaire.

Il est intéressant de remarquer que *les surfaces continues du type de la sphère*[15]) *forment un sousensemble partout dense de l'ensemble de toutes les surfaces continues.* — Soit F une surface continue dans l'espace $(x, y, \dots z)$, image de la sphère S par la transformation t univoque et continue. Par la méthode de l'*approximation simpliciale* due à M. Brouwer[16]), on peut construire une surface F' du type de la sphère dont la distance paramétrique de F est aussi petite que l'on veut. Soit, en effet, $\varepsilon > 0$ arbitraire et soit $\delta > 0$ suffisamment petit de telle sorte que deux points quelco ques de S en distance $< \delta$ ont des images en distance $< \varepsilon/5$. Nous construisons une triangulation de S dont chaque triangle a un diamètre $< \delta$. Soient P_1, P_2, P_3 les sommets d'un triangle, P'_1, P'_2, P'_3 leurs images par t et soient P''_1, P''_2, P''_3 trois points non alignés dont les distances de P'_1, P'_2, P'_3 respectivement sont inférieures à $\varepsilon/5$. Nous transformons par la transformation barycentrique les points du triangle $P_1P_2P_3$ de S en les points du triangle plan déterminé par les segments droits $P''_1P''_2$, $P''_2P''_3$, $P''_3P''_1$. En appliquant la même opération à chaque triangle de S, on obtient une surface

---

[14]) Il est à remarquer qu'une homéomorphie entre les points des sphères ne donne pas nécessairement une homéomorphie entre les points des surfaces.

[15]) ce sont les images de la sphère par des transformations univoques et continues, non constant sur aucun vrai continu de la sphère.

[16]) Brouwer, Mathem. Annalen, Bd. 71 (1911) S. 97—115.

F du type de la sphère (parce que la transformation barycentrique n'est constante sur aucun vrai continu de la sphère S); deux points de F et de F correspondants au même point de la sphère ont une distance $< \varepsilon$; c'est-à-dire, la distance paramétrique de F et F est inférieure à ε.

Le probléme de la *réduction de la représentation paramétrique* d'une surface continue est de trouver une autre représentation paramétrique dont l'ensemble d'éléments est aussi simple que possible. Il s'agit donc de remplacer une décomposition de la sphère en un ensemble d'éléments fermés par une autre décomposition en un ensemble d'éléments homéomorphe au premier de telle sorte que les éléments du second ensemble soient comme ensembles de points d'une plus simple structure. On essayera de prendre au lieu d'un élément qui a des points intérieurs un autre sans points intérieurs, au lieu d'un continu générale un continu composé d'un nombre fini ou dénombrable d'arcs simples, au lieu d'un arc simple un seul point, etc.

Dans une note sur ce sujet[17]), j'ai donné un résultat définitif pour le *cas spécial* caractérisé par la condition suivante:

Nous entendons par un élément $\mathfrak{C}$ un élément $\mathfrak{P}$ qui contient deux points au moins (c'est donc un continu maximum de la sphère contenant deux points au moins et transformé en un seul point de la surface continue); notre condition est que *l'ensemble* $\mathfrak{E}$ *des points qui appartiennent aux différents continus* $\mathfrak{C}$ *soit fermé et que chaque composant de cet ensemble soit un élément* $\mathfrak{C}$[18]).

Sous la dite condition, on peut transformer topologiquement l'ensemble des éléments $\mathfrak{P}$ en un autre ensemble d'éléments de telle façon que l'ensemble $\mathfrak{E}$ a pour image un ensemble de points nulle part dense, composé d'un ensemble dénombrable d'arcs simples. En particulier, si chacun des continus $\mathfrak{C}$ a pour ensemble com-

---

17) Proceed. of the Nat. Acad. of Sciences, Washington, v. 10 (1924) p. 267—271.

18) Dans la note citée, j'ai manqué. malheureusement, de formuler explicitement cette condition; implicitement elle est contenue dans les déductions des lignes 8—10 de la page 268 et des lignes 2—4 de la page 269; à l'énoncé du théorème il faut donc ajouter la condition que *l'ensemble des points de la surface dont les images inverses sont des vrais continus, est fermé et non enchaîné sur la surface,* ce qui est évidemment équivalent à la condition donnée dans le texte.

plémentaire un seul domaine, on peut réduire l'ensemble $\mathfrak{E}$ en un ensemble de points partout discontinu[19]).

Sans la condition ci-dessus, il n'y a pas des réductions de la même vigueur. L'exemple suivant dû à M. Lebesgue nous donne un cas où aucune réduction n'est possible; soit la surface représentée par les formules:

$$x = \sin 2v . \cos u, \; y = \sin 2v . \sin u, \; z = 0, \quad \text{pour} -\pi/2 < v \leqq 0$$
$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = \sin v, \text{pour } 0 \leqq v \leqq \pi/2$$
$$(0 \leqq u < 2\pi, \; -\pi/2 < v < \pi/2).$$

Chaque circonférence $v = \text{const.} \geqq 0$ a pour image un seul point, l'ensembe $\mathfrak{E}$ remplit la demisphère $v \geqq 0$, son image est le segment droit $0 \leqq z \leqq 1$, $x = y = 0$.

Dans une prochaine communication, je considérerai les réductions possibles pour le cas général et leur connexion avec le problème de dimension et de mesure.

Szeged, le 1 décembre, 1926.

---

[19]) voir les pages 268 et 270 de ma note citée.

(Reçu le 1 décembre 1926)

Bibliographie.

F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie. Dritte Auflage, bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke (Grundlehren der math. Wissenschaften XXII), VIII + 406 S., Berlin, J. Springer, 1926.

Kleins klassisch gewordene Untersuchungen über höhere Geometrie, die im Anschluss an sein Erlanger Programm einen gruppentheoretischen Aufbau der Geometrie erzielen, werden in diesem Band in der meisterhaften Bearbeitung von Blaschke wiedergegeben. Die beiden ersten Hauptteile (Der allgemeine Koordinatenbegriff, Lehre von den Transformationen) entsprechen dem ersten Band der Kleinschen Vorlesungen, sind im wesentlichen ungeändert beibehalten; die Änderungen, die vorgenommen wurden, bringen das Werk näher dem Interesse und der Auffassung der modernen Zeit. Über den Inhalt dieser beiden Hauptteile ein Bild zu geben, kann man — mit den Worten der Einleitung — sagen, dass die vorliegende Darstellung ein Gegenstück zur synthetischen und zur analytischen Geometrie bildet, indem sie die Geometrie auf die Analysis anwendet und versucht, mit Hilfe der Geometrie Einsicht in die Lehre von Funktionen mehrerer Veränderlichen zu gewinnen.

Der zweite Band der Kleinschen Vorlesungen, der der Theorie der geometrischen Gruppen gewidmet ist, wird in der neuen Auflage fortgelassen, mit der Motivierung, dass er nur lose mit dem ersten Band zusammenhängt, und da er völlig neu bearbeitet werden müsste. Statt dessen werden als „Dritter Hauptteil" Beispiele geometrischer Forschung aus den letzten Jahrzehnten gegeben, und zwar: I. E. Studys Liniengeometrie. II. J. Radons mechanische Herleitung des Parallelismus von Levi-Civita. III. Aus der Topologie: E. Artins Zöpfe. IV. Über die Differentialgleichungen von Monge. Ihre Beziehungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zur Variationsrechnung. V. Einleitung in die Elementarteilertheorie. Der wertvolle und moderne Inhalt dieses dritten Hauptteiles wird sicher jedem Mathematiker eine interessante Lektüre reichen. Nicht ganz berechtigt scheint es nur, diesen Abschnitt, der mit dem Inhalt des Kleinschen ersten Bandes manchmal auch nur lose oder gar nicht zusammenhängt und teilweise im Anfangsstadium befindlichen Untersuchungen wiedergibt, im selben Bande mit Kleins klassischen Vorlesungen zu geben. Es wäre auch ein Wunsch von vielen Mathematikern, den Kleinschen zweiten Band in einer den modernen Forderungen entsprechenden, ebenso meisterhaften Bearbeitung wie den ersten zu haben.

B. v. Kerékjártó.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Zweite Auflage, mit einem Anhang: **Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung** von **M. Dehn.** (Grundlehren der math. Wissenschaften XXIII) X + 275 S., Berlin, J. Springer, 1926.

Die zum ersten Male in 1882 veröffentlichten Vorlesungen über neuere Geometrie von Pasch haben eine grundlegende Bedeutung für die seitdem entwickelte axiomatische Begründung der Geometrie; der hohe Wert dieses bekannten Werkes besteht aber nicht nur in seiner historischen Bedeutung, sondern dies gilt auch heute als ein Buch, das unterrichtend den Leser zu wissenschaftlichen Untersuchungen vorbereiten kann. Bei der Neuauflage wurde die ursprünglich vertretene Auffassung des Verfassers nebst der Form der Darstellung beibehalten.

Der Anhang hat die Aufgabe das Verhältnis der Resultate von PASCH zu den älteren Forschungen und insbesondere zu den neueren Ergebnissen auf diesem Gebiet klarzustellen. Diese Aufgabe ist in dem von DEHN verfassten Anhang vorzüglich gelöst; man erhält einen klaren Einblick in das Wesen und in die Entwicklung der Geometrie seit der griechischen Schule bis zu unseren Tagen. In einer Einleitung und in fünf Abschnitten, betitelt: Das Parallelenpostulat, Grundlegung der projektiven Geometrie, Die Stetigkeit, Systeme von Postulaten, Inhaltslehre — wird dabei alles was wesentlich und interessant in der Grundlegung der Geometrie ist, dargestellt oder wenigstens angedeutet. Es ist das Werk eines Gelehrten, der nicht nur durch eigene Forschungen, sondern auch durch vielseitiges Interesse in Mathematik und in Geschichte der Mathematik ausgezeichnet ist, und gibt zusammen mit dem grundlegenden Werk von PASCH eines der wertvollesten Bücher, die über Geometrie in den letzten Jahrzehnten erschienen sind.

B. v. Kerékjártó.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Für den Druck bearbeitet von R. COURANT und O. NEUGEBAUER (Grundlehren der math. Wissenschaften XXIV), XIII + 385 S., Berlin, J Springer, 1926.

Das vorliegende posthume Werk F. KLEINS verdankt seine Entstehung den Vorlesungen, die dieser Meister der mathematischen Wissenschaften während der Kriegsjahre vor einem engen Kreise von Zuhörern hielt. In erster Reihe sind die Lieblingsthemata KLEINS, denen er seine schöpferische Tätigkeit und sein treffliches Dozententalent widmete, in ihrer historischen Entwicklung dargestellt und in Zusammenhang mit der Gesamtentwicklung der Mathematik im XIX. Jahrhundert gebracht. Freilich erhält das Werk, dadurch dass der Verfasser seine eigenen Gesichtspunkte in den Vordergrund rücken lässt, den „Stempel des Fragmentarischen" — wie die Herausgeber nicht mit Unrecht bemerken; doch wird dies stets der Fall sein, wenn ein wirklich grosser Forscher über die Entwicklung seiner Wissenschaft schreibt. In solchen Werken ist ja nicht nur der historische Tatbestand selbst vom Interesse, sondern — was die Fachgenossen besonders erwarten — die Auffassung des Verfassers, da dadurch seine eigene wissenschaftliche Entwicklung selbst hervortritt. Deshalb werden wohl alle Mathematiker, insbesondere aber die ehemaligen Schüler und Hörer F. KLEINS, mit grosser Freude das Erscheinen dieses Werkes begrüssen, das einen tiefen Einblick in seine eigenen Schöpfungen gewährt.

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit GAUSS. Bekanntlich leitete KLEIN in den letzten Dezennien die Herausgabe der gesammelten Werke von GAUSS;

so wurde er einer der besten Kenner der GAUSS'schen Mathematik und seine Darstellung dieses Gegenstandes wird jeder Mathematiker mit hohem Interesse lesen. Das zweite Kapitel ist den französischen Mathematikern in den ersten Jahrzehnten des XIX. Jahrhunderts gewidmet. In gedrängter Form referiert der Verfasser über POISSON, FOURIER, CAUCHY (der vielleicht nicht hinreichend gewürdigt wird) und sodann über die geometrische Schule, MONGE, PONCELET, für die KLEIN ganz besonders Sympathie zeigt. In gleicher Weise werden in einem kurzen Kapitel (III) DIRICHLET, ABEL, JACOBI sowie die deutsche Geometrie (MÖBIUS, PLÜCKER, STEINER) gewürdigt. Damit beginnt der weitaus interessantere Teil des Werkes, in dem die Probleme nach den führenden Ideen gruppiert sind. Der Reihe nach werden die Lieblingsthemata KLEINS herangezogen: Geometrie, mathematische Physik, Funktionentheorie. In meisterhafter Weise wird im IV. Kapitel die Entwicklnng der projektiven Geometrie und der parallellaufenden Invariantentheorie geschildert; jeder wird mit Interesse die Entstehung der CAYLEY-KLEINschen Massbestimmung daraus entnehmen. Nach einer schönen Darlegung der Entwicklung der mathematischen Physik (wobei der Lieblingsautor KLEINS, MAC CULLAGH, stark hervorgehoben wird) wendet sich KLEIN der Funktionentheorie zu, der die letzten drei Kapitel gewidmet sind. In meisterhafter Weise wird die Wirkung RIEMANNS und WEIERSTRASS' geschildert. Sodann wird mit grösserer Ausführlichkeit die Rolle des Gruppenbegriffes in der Funktionentheorie zu Sprache gebracht. Ein Überblick über die automorphen Funktionen schliesst das Werk ab.

Recht bedauerlich ist, dass es KLEIN nicht vergönnt war die Abschnitte über LIE und POINCARÉ auszuarbeiten; in seinen älteren Vorlesungen pflegte er ja insbesondere die Leistungen LIES stark zu berücksichtigen. Auch die ganze Mengenlehre mit ihrem genialen Schöpfer G. CANTOR bleiben unberücksichtigt; freilich ist dies ein Gegenstand, der KLEIN nicht nahe lag. Diese Mängel können aber die grossen Vorzüge dieses Werkes, das kaum seinesgleichen in der mathematischen Literatur hat, nicht beeinflussen; sicherlich wird des Werk jedem Fachgenossen eine fesselnde Lektüre von ungeheurem Interesse sein.

A. H.

E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von G. KOWALEWSKI. Zweite Auflage mit einem Anhang über die verallgemeinerte natürliche Geometrie. VI + 352 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1926.

Die natürliche Geometrie (geometria intrinseca) ist eine Disziplin, die versucht die geometrischen Gebilde aus ihren inneren Eigenschaften zu charakterisieren, mithin fremdartige Elemente zu vermeiden — wie sie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems in die Untersuchung hineinbringt. Diese Art der Betrachtung bringt viele Vereinfachungen mit sich und lässt besser das Wesen der erreichten Resultate erkennen. In CESÀRO's Darstellung sind alle diese Vorteile der natürlichen Geometrie besonders zu geniessen; in eleganter und leichtverständlicher Weise wird da eine grosse Menge von Resultaten dargelegt; die vielen und glücklich gewählten Beispiele machen das Buch für das Studium ausgezeichnet geeignet. Die Betrachtung der ebenen Kurven wird als eine Einleitung in die Methoden und Ideen der natürlichen Geometrie gegeben; der ausführlichen Discussion der ebenen und räumlichen Kurven folgt die allgemeine Theorie der Flächen, infinitesimale Transformationen von Flächen, Kurven in Überräumen, Überräume, nebst einigen sehr eleganten Anwendungen auf Gleichgewicht und Elastizitätsfragen.

Im Anhang wird die von G. Pick begründete verallgemeinerte natürliche Geometrie dargestellt, die statt der im Cesàroschen Buch zugrunde liegenden euklidischen Gruppen die allgemeinsten ebenen Transformationsgruppen zu grunde legt.

B. v. Kerékjártó.

E. Lohr, Atomismus und Kontinuitätstheorie in der neuzeitlichen Physik (Sammlung wissenschaftlicher Grundfragen, herausgegeben von R. Hönigswald in Breslau, Bd. VI), 82 S., B. G. Teubner, 1926.

Es wird in der vorliegenden Schrift eine Darstellung der korpuskularen und der kontinuierlichen Auffassung in der Physik gegeben, angefangen von den noch sehr wenig differencierten Anfängen in der griechischen Philosophie bis zu den neuesten Theorien. Die Darstellung bewegt sich in grosser Allgemeinheit, eingehend werden nur die allgemeinsten Auffassungen, nicht aber die speziellen Durchführungen der Theorien behandelt.

Nach einer Schilderung der Entwickelung der korpuskularen Theorie von den Eleaten und Demokritos bis zur modernen Elektronen- und Quantentheorie, wendet sich der Verfasser der Kontinuitätstheorie zu, als deren Anhänger er sich auch ausdrücklich bekennt. Und zwar wird als Prototyp einer „konsequenten" Kontinuitätstheorie die von Jaumann eingehender behandelt im Gegensatz zu den „inkonsequenten" Theorien, die zwar ein kontinuierliches Feld irgendwelcher Zustandsvariablen annehmen, darin aber irgendwelche Singularitäten, „Energieknoten", entsprechend den Atomen oder Elektronen der Korpuskulartheorie, zulassen, wie die Theorie von Mie.

Die Jaumannsche Theorie ist eine Feldtheorie, die von nichtlinearen Differenzialgleichungen beherrscht wird und bei welcher der physikalische Zustand ausser der elektrischen und magnetischen Feldstärke durch eine grössere Zahl Zustandsvariabeln bestimmt wird. Diese Theorie soll auch von denjenigen Eigenschaften der sogenannten Korpuskularstrahlen, die als hauptsächliche Belege der atomistischen Struktur derselben angesehen werden, Rechenschaft geben können. Diese Strahlen werden als longitudinale Schwingungen angenommen. Die Scintillation wird durch enge Strahlenbündel erklärt. Ebenso soll sich auch die Reichweite der α-Strahlen in die Theorie einordnen lassen. Die Laueschen Interferenzen werden nach Lohr durch eine kontinuierliche periodische Struktur der Materie erklärt. Diese Möglichkeiten werden indessen in der vorliegenden Schrift nur ganz allgemein erwähnt, und nicht einmal an den wichtigsten Beispielen durchgeführt. Es wird auch auf die Verwandtschaft der Jaumannschen Theorie mit den bedeutenden Ansätzen von de Broglie hingewiesen, wobei die Verwandtschaft wohl nur darin besteht, dass beidemal Wellen benützt werden. Man wird wohl heutzutage unter dem Eindruck der de BROGLIEschen Gedanken und der SCHRÖDINGERschen Theorie ein erhöhtes Interesse den Kontinuitätstheorien zuwenden, besonders wenn sich diese ebenso fruchtbar erweisen sollten wie die zuletztgenannte, was von der JAUMANNschen Theorie zu zeigen dem Verfasser nicht gelungen zu sein scheint.

R. Ortvay.

W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik I, II (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Trefftz), VIII + 110 bzw. IV + 123 S., dritte Auflage, B. G. Teubner, 1926

Das bestens bekannte Lehrbuch der Vektoranalysis von v. IGNATOWSKY erscheint jetzt zum drittenmal.

Der erste Band behandelt die Grundlagen der Vektoranalysis ohne Rücksicht auf physikalische Anwendungen als eine selbstständige Disziplin. Für die angewandte Methode ist es bezeichnend, dass jeglicher Gebrauch von Koordinatensystemen zum Beweise irgendwelcher vektoranalytischen Transformationen gänzlich vermieden ist. Die analytische Darstellung der vektoranalytischen Operationen, auch mit Hülfe krummliniger orthogonaler Koordinaten, erfolgt erst im vorletzten Kapitel. Im letzten Kapitel des ersten Bandes werden allgemeinere gerichtete Grössen, so die Dyaden, Affinoren und Tensoren behandelt.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen und auf allgemeine Räume, die durch ihr Linienelement definiert sind, wird vermieden, und auch auf den allgemeinen Begriff von Tensoren beliebiger Ordnung wird nicht eingegangen. Es mag dafür wohl ausschlaggebend gewesen sein, dass diese Verallgemeinerungen mehr in der Richtung einer analytischen Behandlungsweise liegen. Da sie aber nicht nur in der allgemeinen und speziellen Relativitätstheorie unentbehrlich sind, sondern auch in anderen Gebieten, wie allgemeine Mechanik, SCHRÖDINGERsche Theorie etc. zur Anwendung gelangen, kann man sie mit einem gewissen Recht als zu dem vektoranalytischen Rüstzeug des theoretischen Physikers gehörig betrachten. Eine diesbezügliche Ergänzung bei einer Neuauflage des vortrefflichen Werkes wäre gewiss sehr erfreulich.

Der zweite Band behandelt die Anwendungen auf die Mechanik des Punktes und der starren Körper, auf Hydrodynamik und Elastizitätstheorie sowie auf Elektrodynamik, wobei die Übersichtlichkeit und Anschaulichkeit der vektoranalytischen Methoden ins rechte Licht gesetzt werden.

R. Ortvay.

Über die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

§ 1.

Der Ausgangspunkt unserer Arbeit ist der folgende wohlbekannte Satz von CAUCHY. *Ist*

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

eine algebraische Gleichung n-ten Grades, worin die Koeffizienten irgendwelche komplexe Zahlen sind, so liegen alle Wurzeln der Gleichung in dem mit dem Radius

$$(2) \qquad 1 + \frac{\mathrm{Max.}\,(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)}{|a_n|}$$

um den Nullpunkt beschriebenen Kreise.

Der Satz lässt sich in folgender speziellerer Form aussprechen: *Alle Wurzeln der Gleichung* (1) *liegen in dem mit dem Radius*

$$(2') \qquad 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

um den Nullpunkt beschriebenen Kreise.

Man benützt in der letzteren Formel alle Koeffizienten der Gleichung (1). Es erhebt sich das Problem, ob es immer nötig ist, dass in der Formel (2') alle Koeffizienten auftreten? Ich beweise im Folgenden zuerst, dass wenn gewisse Wurzeln der Gleichung vom Nullpunkte genügend weit entfernt sind, zur Abgrenzung aller Wurzeln die Benützung aller Koeffizienten nicht nötig ist, sondern aus Formel (2') gewisse Koeffizienten weggelassen werden können. Es gilt nämlich der folgende

Satz I. *Es sei k eine ganze Zahl:*

$$1 \leqq k < n$$

Wenn von den Wurzeln der Gleichung (1) *mindestens* $n-k$ *sich im Äusseren des mit dem Radius*

$$\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

beschriebenen Kreises oder auf seiner Peripherie befinden, so liegen alle Wurzeln im Innern des Kreises

$$|z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_n|}.$$

Zum Beweise des Satzes benützen wir das folgende

Lemma: es sei

$$\varphi_\nu(x) = x^\nu - \binom{\mu}{1} x^{\nu-1} - \binom{\mu}{2} x^{\nu-2} - \ldots - \binom{\mu}{\nu},$$

worin μ *eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, und* $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \mu$. *Ich behaupte. dass für alle positiven Werte von* x, *für welche*

$$x \geqq \frac{1}{\sqrt[\mu]{2}-1}$$

ist, die folgende Ungleichung gilt:

$$\varphi_\nu(x) \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$$

Beweis. Die Gleichung $\varphi_\nu(x) = 0$ hat eine einzige positive Wurzel, diese bezeichnen wir mit ξ_ν. Dann folgt, dass

$$\text{(3)} \qquad \varphi_\nu(x) < 0$$

wenn

$$0 \leqq x < \xi_\nu$$

und

$$\text{(3')} \qquad \varphi_\nu(x) \geqq 0$$

wenn

$$x \geqq \xi_\nu$$

ist, zufolge der Ungleichungen: $\varphi_\nu(0) < 0$, $\varphi_\nu(+\infty) > 0$. Ferner bekommen wir nach der Formel

$$\varphi_\nu(x) = x\,\varphi_{\nu-1}(x) - \binom{\mu}{\nu}$$

dass

$$\varphi_\nu(\xi_{\nu-1}) = -\binom{\mu}{\nu} < 0$$

ist, woraus nach (3)

$$\xi_\nu > \xi_{\nu-1}$$

folgt. Somit gilt

$$\text{(3'')} \qquad \xi_\mu > \xi_{\mu-1} > \ldots > \xi_1.$$

Da aber

$$\varphi_\mu(x) = x^\mu - \binom{\mu}{1} x^{\mu-1} - \ldots - \binom{\mu}{\mu} = 2x^\mu - (x+1)^\mu$$

ist, ergibt sich

$$\xi_\mu = \frac{1}{\sqrt[\mu]{2} - 1}$$

woraus nach (3″) und (3′) die Richtigkeit unseres Lemmas folgt.

Bezeichnen wir nun die Wurzeln der Gleichung (1) mit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so, dass

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_n|,$$

dann besteht nach der Voraussetzung des Satzes

$$\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1} \leqq |z_{k+1}| \leqq |z_{k+2}| \leqq \ldots \leqq |z_n| \tag{4}$$

Schreiben wir $f(z)$ in der Form

$$f(z) = g(z) \,.\, h(z)$$

wo

$$g(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_k)(z - z_n) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{k+1} z^{k+1}$$

und

$$h(z) = (z - z_{k+1})(z - z_{k+2}) \ldots (z - z_{n-1}) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + z^{n-k-1};$$

dabei ist:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= z_{k+1} \,.\, z_{k+2} \ldots z_{n-1} \\ \beta_1 &= z_{k+1} \,.\, z_{k+2} \ldots z_{n-2} + \ldots \\ &\;\vdots \\ \beta_{n-k-1} &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

ferner

$$a_\nu = \alpha_\nu \beta_0 + \alpha_{\nu-1} \beta_1 + \ldots + \alpha_0 \beta_\nu \tag{6}$$

worin

$$\alpha_\nu = 0 \qquad \text{wenn } \nu > k + 1$$

und

$$\beta_\nu = 0 \qquad \text{wenn } \nu > n - k - 1$$

ist.

Wir wollen nachweisen, dass für die Koeffizienten β_ν folgende Beziehung besteht

$$|\beta_0| - |\beta_1| - |\beta_2| - \ldots - |\beta_\nu| \geqq 0 \tag{7}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n - k - 1).$$

Da $a_0 \neq 0$ und nach (5) $\beta_0 \neq 0$ ist, lässt sich die Ungleichung in folgender Form schreiben

$$|\beta_0|\left(1-\left|\frac{\beta_1}{\beta_0}\right|-\left|\frac{\beta_2}{\beta_0}\right|-\ldots\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\right)\geqq 0$$

hierin ist nach (5)

$$\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|=\left|\frac{\sum z_{k+1}\cdot z_{k+2}\ldots z_{n-\nu-1}}{z_{k+1}z_{k+2}\ldots z_{n-1}}\right|$$

worin im Zähler die Summe der aus den Elementen $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{n-1}$ gebildeten Kombinationen $n-k-\nu-1$-ter Klasse steht, daher

$$\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\leqq\frac{1}{\sum|z_{k+1}z_{k+2}\ldots z_{k+\nu}|}$$

und wenn

(8) $$|z_{k+1}|=\xi$$

dann wird
$$\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\leqq\binom{n-k-1}{\nu}\frac{1}{\xi^\nu}$$

daraus folgt, dass

$$1-\left|\frac{\beta_1}{\beta_0}\right|-\left|\frac{\beta_2}{\beta_0}\right|-\ldots-\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\geqq$$

$$\geqq 1-\binom{n-k-1}{1}\frac{1}{\xi}-\binom{n-k-1}{2}\frac{1}{\xi^2}-\ldots-\binom{n-k-1}{\nu}\frac{1}{\xi^\nu}=$$

$$=\frac{\xi^\nu-\binom{n-k-1}{1}\xi^{\nu-1}-\binom{n-k-1}{1}\xi^{\nu-2}-\ldots-\binom{n-k-1}{\nu}}{\xi^\nu}$$

woraus nach (4) und (8) laut des Lemma's die Richtigkeit der Behauptung (7) folgt. Wir bestimmen mit deren Hilfe eine zwischen den α_ν und a_ν bestehende Beziehung, nämlich

(9) $$\text{Max.}\,(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|)\leqq|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|=A.$$

Um dies zu beweisen schreiben wir die nach (6) gültigen Ungleichungen

$$\begin{aligned}
|\alpha_0\beta_0|&=|a_0|\\
|\alpha_1\beta_0|-|\alpha_0\beta_1|&\leqq|a_1|\\
|\alpha_2\beta_0|-|\alpha_1\beta_1|-|\alpha_0\beta_2|&\leqq|a_2|\\
&\vdots\\
|\alpha_\nu\beta_0|-\ldots-|\alpha_2\beta_{\nu-2}|-|\alpha_1\beta_{\nu-1}|-|\alpha_0\beta_\nu|&\leqq|a_\nu|;
\end{aligned}$$

durch Addition ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&|\alpha_\nu|\,|\beta_0|+|\alpha_{\nu-1}|\,(|\beta_0|-\beta_1|)+\\
&+|\alpha_{\nu-2}|\,(|\beta_0|-|\beta_1|-|\beta_2|)+\ldots+|\alpha_0|\,(|\beta_0|-|\beta_1|-\ldots-|\beta_\nu|)\\
&\leqq|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_\nu|
\end{aligned}$$

woraus nach (4) und (7)

$$|\alpha_\nu|\leqq|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_\nu|\leqq A$$

folgt.

Nach (2) sind alle Wurzeln von $g(z)=0$ und also auch die von $f(z)=0$ im Innern des Kreises

$$|z|<1+\frac{\mathrm{Max.}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|)}{|\alpha_{k+1}|}$$

enthalten.

Da aber $\alpha_{k+1}=a_n$, so folgt nach (9), dass

$$1+\frac{\mathrm{Max.}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|)}{|\alpha_{k+1}|}\leqq 1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}$$

w. z. b. w.

Mit Hilfe des ersten Satzes beweisen wird den folgenden.

S a t z II. *Die Gleichung* (1) *hat mindestens* $k+1$ *Wurzeln im Innern des Kreises vom Radius*

$$\varrho=\mathrm{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1},\ 1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}\right),$$

worin $0\leqq k<n.$

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall. Es liegen mindestens $n-k$ der Wurzeln im Äusseren des Kreises

$$|z|=\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

oder auf seinem Rand.

Dann liegen nach Satz I alle Wurzeln in dem Kreise

$$|z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}=\mathrm{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1},\ 1+\frac{|a_0|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}\right)$$

Zweiter Fall. Es liegen höchstens $n-k-1$ Wurzeln im Äusseren des Kreises

$$|z|=\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

oder auf seinem Rand.

In diesem Falle liegen mindestens $k+1$ Wurzeln im Kreis

$$|z|<\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

und da

$$\varrho=\mathrm{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1},\ 1+\frac{|a_0|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}\right)$$

also wird auch der Kreis vom Radius ϱ mindestens $k+1$ Wurzeln enthalten, womit der Satz II bewiesen ist.

Wenn wir im Satz II speziell $k=n-2$ setzen, erhalten wir den folgenden Satz von Herrn FEKETE, nämlich, dass *die Gleichung* (1) *im Kreise*

$$|z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-2}|}{|a_n|}$$

mindestens $n-1$ *Wurzeln besitzt.*[1])

§ 2.

Die Wurzeln der Gleichung $f(z)$ bezeichnen wir wieder mit $z_1, z_2, \ldots z_n$, so dass

$$|z_1|\leqq|z_2|\leqq\ldots\leqq|z_n|.$$

Bedeute q einen *positiven Parameter,* für welchen

$$(10)\qquad 0<\frac{1}{q}\leqq|z_n|.$$

Bilden wir die folgenden Summen

$$(10')\qquad S_\mu^{(2)}=\sum_{i=1}^{\mu} q^i \qquad \mu=1,2,\ldots,n-2$$

und daraus

$$S_\mu^{(3)}=\sum_{i=1}^{\mu} S_{\mu-i+1}^{(2)}\cdot q^i \quad \mu=1,2,\ldots,n-3.$$

Sei im allgemeinen

$$(10'')\qquad S_\mu^{(\nu+1)}=\sum_{i=1}^{\mu} S_{\mu-i+1}^{(\nu)}\cdot q^i \quad \mu=1,2,\ldots,n-\nu-1.$$

Es gilt der folgende

Satz III. *Die Gleichung* $f(z)=0$ *hat mindestens* $k+1$ *Wurzeln im Kreis*

$$|z|<1+\frac{|a_0|\,S_{k+1}^{(n-k-1)}+|a_1|\,S_k^{(n-k-1)}+\ldots+|a_k|\,S_1^{(n-k-1)}}{|a_n|}$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n-3).$$

Zuerst beweisen wir den Satz für $k=n-3$.

Sei $\qquad f(z)=(z-z_n)\,\varphi(z)$

wo $\qquad \varphi(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_{n-1}z^{n-1}.$

Wenn $|z_n|\geqq 1$, so ist, wie wir behaupten,

---

[1]) Diesen Satz entnehme ich einer mündlicher Mitteilung von Herrn FEKETE.

(11) $\quad \text{Max.}\,(|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_{n-2}|) \leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-2}|.$

Es besteht nämlich

(12) $$a_\nu = b_{\nu-1} - z_n b_\nu$$

wo $b_\nu = 0$ für $\nu < 0$ und für $\nu > n-1$, nach (12)

$$|z_n b_0| = |a_0|$$
$$|z_n b_1| - |b_0| \leqq |a_1|$$
$$\vdots$$
$$|z_n b_\nu| - |b_{\nu-1}| \leqq |a_\nu|.$$

Aus den letzten Ungleichungen folgt

$$|b_0|(|z_n|-1) + |b_1|(|z_n|-1) + \ldots + |b_{\nu-1}|(|z_n|-1) + |z_n||b_\nu| \leqq$$
$$\leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_\nu|.$$

Hier ist die linke Seite nicht kleiner als $|b_\nu|$, da $|z_n| \geqq 1$. Daraus folgt die Richtigkeit von (11)

Es sei nun

$$f(z) = (z - z_n)(z - z_{n-1})\,\psi(z)$$

wo

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-2} z^{n-2}$$
$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1} = (z - z_{n-1})\,\psi(z)$$

Wenn $|z_{n-1}| \geqq 1$, so ist laut (11)

$$\text{Max.}\,(|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-3}|) \leqq |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-3}|.$$

Daraus folgt laut des erwähnten CAUCHYschen Satzes

$$|z_{n-2}| < 1 + \frac{\text{Max.}\,(|c_0|, \ldots, |c_{n-3}|)}{|c_{n-2}|} \leqq 1 + \frac{|b_0| + \ldots + |b_{n-3}|}{|a_n|}$$

oder wenn wir

$$R = |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-3}|$$

setzen

(13) $$|z_{n-2}| < 1 + \frac{R}{|a_n|}$$

Um den Wert von R zu berechnen, bemerken wir, dass

(14) $$b_\nu = -\frac{a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^\nu a_\nu}{z_n^{\nu+1}}$$

also

$$R = \sum_{\nu=0}^{n-3} \frac{|a_0 + z_n a_1 + \ldots + z_n^\nu a_\nu|}{|z_n|^{\nu+1}}$$

$$\leqq |a_0| \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{|z_n|^i} + |a_1| \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{|z_n|^i} + \ldots + |a_{n-3}| \frac{1}{|z_n|}.$$

Mit Berücksichtigung von (10) und (10′) ergibt sich

$$R \leqq |a_0|\, S_{n-2}^{(2)} + |a_1|\, S_{n-3}^{(2)} + \ldots + |a_{n-3}|\, S_1^{(2)} = R'$$

also zufolge (13)

$$|z_{n-2}| < 1 + \frac{R'}{|a_n|}.$$

Damit ist unser Satz für $k+1 = n-2$ bewiesen.

Unter der Voraussetzung, dass der Satz für $k+1 = n-\nu$ gilt, beweisen wir denselben für $k+1 = n-(\nu+1)$. Sei

$$f(z) = (z - z_n)\, g(z)$$
$$g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1}.$$

Den Satz III, der nach unserer Annahme für $k = n-\nu$ gilt, auf $g(z) = 0$ anwendend, erhalten wir

$$|z_{n-1-\nu}| < 1 + \frac{|b_0|\, S^{(\nu)}_{n-\nu-1} + |b_1|\, S^{(\nu)}_{n-\nu-2} + \ldots + |b_{n-\nu-2}|\, S^{(\nu)}_1}{|a_n|}.$$

Da $q \geqq \frac{1}{|z_n|}$, folgt aus (14)

$$|b_\nu| \leqq |a_0|\, q^{\nu+1} + |a_1|\, q^\nu + \ldots + |a_\nu|\, q.$$

Aus der letzten Beziehung und aus (10″) folgt nun

$$|z_{n-1-\nu}| < 1 + \frac{|a_0|\, S^{(\nu+1)}_{n-\nu-1} + |a_1|\, S^{(\nu+1)}_{n-\nu-2} + \ldots + |a_{n-\nu-2}|\, S^{(\nu+1)}_1}{|a_n|}$$

w. z. b. w.

Als Beispiel erwähnen wir den Fall $q = 1$, für welchen unserer Satz offenbar gilt. In diesem Fall haben wir

$$S_i^{(n-k-1)} = \binom{n-k-3+i}{n-k-2};$$

diese sind die *figurierten Zahlen* $(n-k-2)$-ter Ordnung.

Szeged, den 1. November 1926.

(Eingegangen am 2. November 1926.)

Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes.

Par ADOLPHE SZÜCS à Budapest.

Le lemme de DU BOIS-REYMOND lève une objection fondamentale, relative à l'établissement des équations différentielles du Calcul des Variations, lorsque les fonctions inconnues dépendent d'une seule variable. Mais on sait depuis une Note de M. HADAMARD (parue dans le tome 144 des Comptes Rendus, en 1907) que l'objection est fondée en fait aussitôt que le nombre des variables indépendantes dépasse l'unité. Pour le cas de deux variables, M. HAAR[1]) est parvenu, sans faire d'hypothèses supplémentaires sur l'existence des dérivées secondes, à substituer à l'équation classique aux dérivées partielles un système de trois équations à trois inconnues. Pour y arriver, il a commencé par démontrer le théorème:

Si les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, continues dans un domaine T, sont telles que

$$\iint_T \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy = 0$$

pour toutes les fonctions $\zeta(x, y)$ à dérivées premières continues et s'annulant sur la frontière de T, alors l'intégrale

$$\int u dy - v dx,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, intérieure à T, a pour valeur zéro.

[1]) A. HAAR, Über die Variation der Doppelintegrale, Journal für Mathematik 149 (1919), p. 1–18.

A. HAAR, A kettős integrálok variatiójáról, Mathematikai és Természettudományi Értesitő, XXX (1917).

En vue de généraliser ce théorème, M. HAAR pose dans son travail le problème suivant:

Soit T un domaine à trois dimensions et $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ des fonctions continues définies dans ce domaine. Supposons que l'intégrale

$$\iiint \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

étendue au domaine T soit nulle pour toutes les fonctions $\zeta(x, y, z)$ continues dans T, s'annulant (ou se réduisant à une constante) sur la frontière et admettant, à l'intérieur, des dérivées premières continues. Que peut-on en conclure relativement aux fonctions u, v, w?

Les pages suivantes sont consacrées à l'étude de ce problème. Faisant usage d'une méthode dont le principe a déjà été employé par M. LICHTENSTEIN[2]) pour le cas du plan, nous établissons d'abord qu'une certaine intégrale, contenant les fonctions u, v, w et prise sur une surface fermée quelconque, intérieure à T, doit être nulle. Nous en déduisons un champ de vecteurs dont le rotationnel fournira une représentation paramétrique des fonctions u, v, w (le rôle de paramètres étant joué par des *fonctions arbitraires).* Pour y arriver, nous définissons le rotationnel d'une façon appropriée à nos besoins, et nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de STOKES, basée sur la définition adoptée du rotationnel. L'idée de cette démonstration nous a été suggérée par M. HAAR. Nous montrons enfin que si les coordonnées d'un champ de vecteurs admettent certaines dérivées partielles continues, le rotationnel entendu au sens classique est identique à celui qui sert de base à nos raisonnements.

Quoique les méthodes employées s'appliquent à un nombre quelconque de variables indépendantes, nous considérerons, pour simplifier, uniquement l'espace ordinaire à trois dimensions.

I

Soit S une surface fermée quelconque à l'intérieur du domaine T, sans point double et à plan tangent continu. Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface.

[2]) L. LICHTENSTEIN, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten. Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, Cracovie, 6 février 1924.

Nous allons démontrer que l'hypothèse relative aux fonctions u, v, w entraîne pour celles-ci la propriété suivante: *L'intégrale de surface*

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS$$

est nulle. Ce théorème généralise celui de M. Haar, suivant lequel, dans des conditions analogues, on a pour le plan

$$\int_s (u\alpha + v\beta)\, ds = 0$$

s étant une courbe fermée quelconque, ds l'élément de son arc et α, β les cosinus directeurs de la normale extérieure à la courbe.

Introduisons les surfaces parallèles à S. En désignant par S_ϱ celle de ces surfaces dont les points sont à la distance ϱ de la surface S, et en faisant varier ϱ de 0 à a (où a est un nombre positif suffisamment petit), on obtient une certaine portion d'espace D, comprise entre les deux surfaces S et S_a, et intérieure au domaine T. Dans la portion d'espace D chaque point peut être caractérisé par la valeur ϱ déterminant la surface S_ϱ qui passe par le point, et par deux autres paramètres λ, μ fixant la position du point sur cette surface. L'élément de volume de la portion d'espace sera $d\varrho\, dS_\varrho$ si nous désignons par dS_ϱ l'élément d'aire de la surface S_ϱ.

Définissons maintenant une fonction ζ constante dans l'espace intérieur à S et extérieur à S_a, et dépendant dans le domaine D uniquement de ϱ. Si nous prenons soin de choisir pour exprimer cette dépendance une fonction $f(\varrho)$ à dérivée continue dont la dérivée s'annule aux extrémités de l'intervalle $(0, a)$, et si nous posons $\zeta = f(0)$ à l'intérieur de S, et $\zeta = f(a)$ à l'extérieur de S_a, nous obtiendrons une des fonctions admissibles et les dérivées premières de celle-ci s'exprimeront comme il suit:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{d\zeta}{d\varrho}\alpha, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{d\zeta}{d\varrho}\beta, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{d\zeta}{d\varrho}\gamma,$$

car

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}, \ldots$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} = 0, \frac{\partial\zeta}{\partial\mu} = 0$$

et, en désignant par (x_0, y_0, z_0) le pied de la normale sur la surface S,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2} = \frac{x-x_0}{\varrho} = \alpha,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} = \beta, \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \gamma.$$

Toute substitution faite, nous aurons

$$\iiint\limits_T \left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+w\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D \left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+w\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_D (u\alpha+v\beta+w\gamma)\frac{d\zeta}{d\varrho}\,d\varrho\,dS_\varrho = \int_0^a f'(\varrho)\,d\varrho \iint\limits_{S_\varrho} (u\alpha+v\beta+w\gamma)\,dS_\varrho = 0.$$

L'intégrale

$$\iint\limits_{S_\varrho} (u\alpha+v\beta+w\gamma)\,dS_\varrho$$

dépend évidemment de ϱ seul et elle est une fonction continue $J(\varrho)$ de ϱ. Comme $f'(\varrho)$ est une fonction quelconque assujettie à la condition de s'annuler pour $\varrho=0$ et $\varrho=a$, l'équation

$$\int_0^a J(\varrho) f'(\varrho)\,d\varrho = 0$$

conduit, par l'application du lemme fondamental du Calcul des Variations, à la conclusion

$$J(\varrho) = 0.$$

Si on fait, en particulier, $\varrho=0$, on arrive à la proposition énoncée.

II.

Dans le cas du plan, l'égalité

$$\int_s (u\alpha+v\beta)\,ds = 0$$

valable pour toute ligne fermée permet de construire très simplement une fonction $\omega(x, y)$ à dérivées premières continues et telle que

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial y},\ v = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.\text{[3]}$$

Inversement, si u et v dérivent d'une fonction ω comme l'indiquent ces formules, l'intégrale

$$\int (u\alpha+v\beta)\,ds$$

s'annule bien pour toute ligne fermée. Les deux faits arrivant simultanément, nous dirons que les formules

[3]) Voir Haar, loc. cit.

$$u = \frac{\partial\omega}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\omega}{\partial x}$$

représentent sous forme paramétrique (la fonction ω jouant le rôle de paramètre) l'ensemble des systèmes de fonctions u, v tels que l'intégrale considérée soit nulle pour toute ligne fermée.

Existe-t-il, dans le sens que nous venons de préciser, une représentation paramétrique des systèmes de fonctions u, v, w tels que

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS = 0$$

quelle que soit la surface fermée S?

L'hypothèse peut encore être formulée en disant que si L est une ligne fermée déterminée et σ une surface bilatère quelconque limitée par le contour L, l'intégrale

$$\iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

dépend uniquement de la ligne L et non du choix de la surface σ.

S'il est possible alors de trouver un champ de vecteurs $\vec{\Omega}$ ayant pour coordonnées $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ et tel que, L étant parcourue dans le sens positif par rapport aux normales de la surface σ,

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma,$$

on pourra, en partant d'une définition convenable du vecteur rot $\vec{\Omega}$, établir que les fonctions u, v, w sont les coordonnées du vecteur rot $\vec{\Omega}$:

$$u = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_x, \quad v = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_y, \quad w = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_z$$

Inversement, la démonstration du théorème de Stokes, basée sur la même définition du rotationnel, permettra d'affirmer que $\vec{\Omega}$ représentant un champ de vecteurs arbitraire à rotationnel continu, les formules précédentes donnent trois fonctions u, v, w dont l'intégrale

$$\iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS$$

est nulle sur toute surface fermée.

Dans le cas où u, v, w admettraient des dérivées premières continues, on n'aurait qu'à poser

$$u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

et résoudre ces équations par rapport à X, Y, Z.[4]) Cette résolution n'offre alors aucune difficulté et par le théorème de Stokes

$$\int Xdx + Ydy + Zdz =$$
$$= \iint \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \gamma \right] d\sigma$$

on s'assure que la condition imposée primitivement à X, Y, Z est vérifiée. La difficulté réside dans le fait que la construction du champ $\vec{\Omega}(X, Y, Z)$ est demandée sous la seule hypothèse que les fonctions u, v, w sont continues.

Il est évident, d'abord, que si un champ de vecteurs $\vec{\Omega}$ satisfait aux conditions requises, le champ $\vec{\Omega} + \text{grad.}\, \varphi$ y satisfera de même, φ étant une fonction quelconque à dérivées premières continues; et inversement, tout autre champ jouissant des mêmes propriétés que $\vec{\Omega}$ n'en diffère que par le gradient d'une fonction à dérivées premières continues. Il suffira donc d'obtenir un seul champ répondant à la question.

Pour éviter les complications, nous supposerons que la portion d'espace, objet de nos recherches, contient un point O tel que le segment de droite OP reliant O à un point quelconque P de cette portion d'espace se trouve à l'intérieur de celle-ci. Nous placerons l'origine au point O.

Considérons le problème comme résolu et formons la fonction

$$\varphi(P) \equiv \varphi(x, y, z) \equiv \int_{OP} Xdx + Ydy + Zdz,$$

en intégrant le long du segment de droit OP. Faisons passer par P une droite d de cosinus directeurs a, b, c et prenons sur cette droite un second point P'. Appliquons l'hypothèse au triangle OPP':

$$\iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = \varphi(P) + \int_{PP'} (Xa + Yb + Zc)\, ds - \varphi(P')$$

d'où

$$\frac{1}{PP'} \int_{PP'} (Xa + Yb + Zc)\, ds = \frac{\varphi(P') - \varphi(P)}{PP'} + \frac{1}{PP'} \iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma.$$

Dans cette égalité fondamentale, nous maintiendrons le point P et la droite d (c'est-à-dire x, y, z; a, b, c) fixes et nous ferons tendre P' vers P. Le premier terme du second membre tendra vers

[4]) Voir, par exemple, Picard, Traité d'Analyse. t. I, 3e éd., p. 142.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}a+\frac{\partial\varphi}{\partial y}b+\frac{\partial\varphi}{\partial z}c$$

pourvu que φ possède des dérivées premières continues, ce que nous admettrons pour le moment. Calculons le deuxième terme. Tous les points B du triangle peuvent s'obtenir en portant sur OP la distance $OA=\varrho$, sur la demi-droite issue de A et parallèle à PP' la distance ϱ' et en faisant varier ϱ de 0 à r $(=OP)$ et ϱ' de 0 à $\frac{\varrho}{r}\,PP'$. Adoptons ϱ et ϱ' pour coordonnées sur le plan OPP'; nous aurons pour l'élément d'aire $d\sigma$ l'expression

$$d\sigma=\sin\omega\, d\varrho\, d\varrho'$$

dans laquelle ω désigne l'angle aigu compris entre OP et PP'. Les cosinus directeurs α, β, γ de la normale au plan OPP' (valeurs constantes dans le domaine d'intégration) s'exprimeront par les formules élémentaires

$$\alpha=\frac{yc-zb}{r\sin\omega},\ \beta=\frac{za-xc}{r\sin\omega},\ \gamma=\frac{xb-ya}{r\sin\omega}.$$

Donc

$$\iint\limits_{OPP'}(u\alpha+v\beta+w\varrho)\,d\sigma=$$

$$=\iint\left(u\frac{yc-zb}{r\sin\omega}+v\frac{za-xc}{r\sin\omega}+w\frac{xb-ya}{r\sin\omega}\right)\sin\omega\, d\varrho\, d\varrho'=$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^r d\varrho\int_0^{\frac{\varrho}{r}PP'}\begin{vmatrix}u&v&w\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}d\varrho'$$

et, par suite, en posant $\tau=\frac{\varrho}{r}PP'$,

$$\frac{1}{PP'}\iint\limits_{OPP'}(u\alpha+v\beta+w\gamma)\,d\sigma=\frac{1}{r^2}\int_0^r\left\{\frac{\varrho}{\tau}\int_0^\tau\begin{vmatrix}u&v&w\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}d\varrho'\right\}d\varrho.$$

La fonction sous le premier signe $\int$

$$\frac{\varrho}{\tau}\int_0^\tau\begin{vmatrix}u&v&w\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}d\varrho'$$

admet, si τ tend vers zéro, la limite

$$\varrho\begin{vmatrix}u&v&w\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}$$

et cela, uniformément pour $0 \leq \varrho \leq \tau$ (conséquence du fait que les fonctions u, v, w sont continues en ϱ, ϱ' et que x, y, z; a, b, c sont indépendants des variables d'intégration). Ainsi, en passant à la limite, on trouve

$$\lim \frac{1}{PP'} \iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = \frac{1}{r^2} \int_0^r \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \varrho\, d\varrho.$$

De tout cela, il résulte que la limite $Xa + Yb + Zc$ du premier membre de l'égalité fondamentale s'exprime par les fonctions φ, u, v, w de la manière suivante

$$Xa + Yb + Zc = \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial y} b + \frac{\partial \varphi}{\partial z} c + \frac{1}{r^2} \int_0^r \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \varrho\, d\varrho.$$

Or, a, b, c sont les cosinus directeurs d'une droite arbitraire passant par P. Donc

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \int_0^r (vz - wy)\, \varrho\, d\varrho,$$

$$Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{r^2} \int_0^r (wx - uz)\, \varrho\, d\varrho,$$

$$Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \int_0^r (uy - vx)\, \varrho\, d\varrho.$$

Mais alors le vecteur $\vec{\Omega}^*$

$$X^* = \frac{1}{r^2} \int_0^r (vz - wy)\, \varrho\, d\varrho, \quad Y^* = \frac{1}{r^2} \int_0^r (wx - uz)\, \varrho\, d\varrho,$$

$$Z^* = \frac{1}{r^2} \int_0^r (uy - vx)\, \varrho\, d\varrho$$

ne diffère du vecteur $\vec{\Omega}\,(X, Y, Z)$ que par le gradient de la fonction φ; il est, par conséquent, lui-même une solution du problème.

Pour arriver au résultat que nous venons d'énoncer, nous avons dû supposer l'existence du vecteur $\vec{\Omega}$ et celle des dérivées premières d'une certaine fonction φ. Le vecteur $\vec{\Omega}^*$ étant entièrement déterminé par les fonctions données u, v, w, nous avons maintenant à examiner, indépendamment de toute hypothèse, si l'égalité

$$\int_L X^*dx + Y^*dy + Z^*dz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

subsiste, lorsque σ est une portion de surface bilatère quelconque et L le contour de σ.

Substituons dans le premier membre les expressions trouvées. Nous aurons la formule

$$\int_L X^*dx + Y^*dy + Z^*dz =$$

$$= \int_{-L} ds \int_0 \left[(vz - wy)\frac{dx}{ds} + (wx - uz)\frac{dy}{ds} + (uy - vx)\frac{dz}{ds}\right]\frac{\varrho\, d\varrho}{r^2} =$$

$$= \iint \frac{\varrho}{r^2} \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} ds\, d\varrho$$

où l'intégrale double doit être étendue à la surface conique C formée par les segments de droite issues de O et aboutissant aux points de L. Sur cette surface, l'élément d'aire s'exprime par les variables s (arc du contour L) et ϱ (distance comptée de O)

$$d\sigma = \frac{\varrho}{r} \sin\omega\, ds\, d\varrho,$$

ω désignant l'angle aigu entre la génératrice du cône et la tangente au contour. Notre intégrale double s'écrit donc

$$\iint_C \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{r\sin\omega}.$$

Remarquons qu'en un point quelconque de la génératrice passant par le point (x, y, z) du contour, la normale à la surface a pour cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{1}{r\sin\omega}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right),\ \beta = \frac{1}{r\sin\omega}\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{r\sin\omega}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right);$$

donc l'intégrale double n'est autre que

$$\iint_C (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma.$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite relativement aux fonctions u, v, w, l'intégrale

$$\iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

a même valeur sur deux portions de surface quelconques pourvu qu'elles aient le même contour. Ainsi, en définitive,

$$\int_L X^*dx + Y^*dy + Z^*dz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

où σ est une portion de surface quelconque avec L comme contour. La vérification est faite.

III.

L'égalité

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

nous fournit un moyen de déduire du champ de vecteurs $\vec{\Omega}\,(X, Y, Z)$ le champ $\vec{R}\,(u, v, w)$.

Soient P un point déterminé de l'espace, et n une direction donnée ayant pour cosinus directeurs α, β, γ. Considérons une ligne plane fermée L dans un plan perpendiculaire à la direction n; désignons par σ l'aire limitée par L; et écrivons l'égalité précédente sous la forme

$$\frac{1}{\sigma}\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\sigma}\iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma.$$

Si nous faisons tendre la ligne fermée L vers le point P, le second membre a pour limite $u(P)\,\alpha + v(P)\,\beta + w(P)\,\gamma$, c'est-à-dire la composante R_n, suivant la direction n, du vecteur $\vec{R}$ en P; donc

$$R_n = \lim \frac{1}{\sigma}\int_L Xdx + Ydy + Zdz.$$

Définissons, d'une façon générale, le rotationnel d'un vecteur $\vec{\Omega}\,(X, Y, Z)$ par l'égalité précédente. Il faut s'assurer qu'on a bien affaire ici à un vecteur; en d'autres termes, que R_x, R_y, R_z étant les composantes suivant les axes O_x, O_y, O_z, on a pour la composante R_n suivant la direction de cosinus directeurs α, β, γ,

$$R_n = R_x\alpha + R_y\beta + R_z\gamma.$$

A cet effet, menons par P trois droites parallèles aux axes de coordonnées et prenons sur ces droites les points A, B, C de telle façon que la normale au plan ABC ait pour cosinus directeurs α, β, γ. Désignons par σ l'aire positive du triangle ABC et par $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ les aires PBC, PCA, PAB, ces dernières étant prises positivement ou négativement suivant que les normales positives qui correspondent aux parcours indiqués coïncident ou non avec les directions positives des axes. Avec ces conventions, on a

$$\sigma_x = \alpha\sigma, \ \sigma_y = \beta\sigma, \ \sigma_z = \gamma\sigma$$

et

$$R_n = \lim \frac{1}{\sigma} \int_{ABC} Xdx + Ydy + Zdz,$$

$$R_x = \lim \frac{1}{\sigma_x} \int_{PBC}, \ R_y = \lim \frac{1}{\sigma_y} \int_{PCA}, \ R_z = \lim \frac{1}{\sigma_z} \int_{PAB}.$$

Remarquons maintenant que

$$\int_{ABC} = \int_{PBC} + \int_{PCA} + \int_{PAB} ;$$

il s'ensuit

$$\frac{1}{\sigma} \int_{ABC} = \alpha \cdot \frac{1}{\sigma_x} \int_{PBC} + \beta \cdot \frac{1}{\sigma_y} \int_{PCA} + \gamma \cdot \frac{1}{\sigma_z} \int_{PAB},$$

d'où, par un passage à la limite, on tire la relation annoncée.

Le rotationnel a donc bien le caractère de vecteur; nous le désignerons, suivant l'usage, par le symbole rot $\vec{\Omega}$ et ses coordonnées par

$$(\mathrm{rot}\,\vec{\Omega})_x, \ (\mathrm{rot}\,\vec{\Omega})_y, \ (\mathrm{rot}\,\vec{\Omega})_z.$$

Le résultat peut alors se résumer ainsi: Il existe un champ $\vec{\Omega}$ à rotationnel continu et tel que

$$u = (\mathrm{rot}\,\vec{\Omega})_x, \ v = (\mathrm{rot}\,\vec{\Omega})_y, \ w = (\mathrm{rot}\,\vec{\Omega})_z.$$

IV.

Pour démontrer l'inverse, établissons d'abord le théorème de Stokes en partant de la définition que nous venons d'adopter pour le rotationnel.

Nous envisagerons, pour commencer, une aire plane σ limitée par une ligne fermée (plane) L. Le rotationnel $\vec{R}$ étant défini pour chaque point de σ, considérons deux nombres A et B tels que la projection R_n de $\vec{R}$ sur la normale au plan de σ soit comprise, au sens strict, entre ces nombres:

$$A < R_n < B$$

dans toute l'aire σ. Nous affirmons que

$$A\sigma < \int_L Xdx + Ydy + Zdz < B\sigma.$$

Supposons que ce ne soit pas le cas, par exemple, que

$$\int_L \geqq B\sigma.$$

Divisons σ en deux parties σ' et σ'' limitées par les contours L' et L''. Comme

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \text{ et } \int_L = \int_{L'} + \int_{L''},$$

l'une au moins des inégalités

$$\int_{L'} \geqq B\sigma', \int_{L''} \geqq B\sigma''$$

sera nécessairement vérifiée. Nous pourrons former alors une suite d'aires $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu, \ldots$ limitées par les contours $L_1, L_2, \ldots, L_\nu, \ldots$ qui s'enveloppent mutuellement, tendent vers un point P et sont tels que

$$\int_{L_\nu} \geqq B\sigma_\nu.$$

Il s'ensuivra qu'au point P

$$R_n = \lim \frac{1}{\sigma_\nu} \int_{L_\nu} \geqq B,$$

contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, si M et m désignent les bornes supérieure et inférieure de R_n dans l'aire σ, on a

$$m\sigma \leqq \int_L Xdx + Ydy + Zdz \leqq M\sigma.$$

Cette double inégalité s'applique à toute portion de σ; elle entraîne, pour le cas où R_n est une fonction continue, l'égalité

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \iint_\sigma R_n d\sigma.$$

Nous aurions pu déduire ce résultat d'un théorème très général de M. Lebesgue,[5]) mais pour le but poursuivi, les considérations élémentaires précédentes ont suffi.

Le théorème de Stokes se trouve ainsi démontré pour le plan. De là, on s'élève au théorème général en faisant intervenir un polygone inscrit au contour L, une surface polyédrale limitée par

---

[5]) H. Lebesgue, Intégration des fonctions discontinues. Annales de l'Ecole Normale, 27 (1910), p. 399.

C. de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse, t. II, 2e éd., p. 116.

C. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, Paris, 1916, p. 73.

ce polygone et tendant vers la surface σ de telle façon que les faces du polyèdre deviennent plans tangents, puis en passant à la limite.[6])

Du théorème de Stokes, on tire la conclusion immédiate que si S est une surface fermée et $\vec{R}(u, v, w)$ le rotationnel continu d'un champ $\vec{\Omega}$, on a

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS = 0.$$

Nous avons ainsi la réponse complète à la question posée au début:

L'ensemble des fonctions u, v, w cherchées s'obtient par les formules

$$u = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_x,\ v = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_y,\ w = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_z,$$

$\vec{\Omega}$ représentant un champ de vecteurs quelconque à rotationnel continu.

V.

Le théorème de Stokes permet d'établir une formule intéressante qui montre, entre autres choses, que si les coordonnées du vecteur $\vec{\Omega}$ admettent certaines dérivées partielles du premier ordre, la définition usuelle du rotationnel est identique à celle dont nous nous sommes servi.

Soit C un arc de courbe allant du point P au point Q et représenté par les équations

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t)\ [0 \leqq t \leqq T]$$

Faisons varier l'arc C en posant

$$x = \Phi_1(t, \lambda),\ y = \Phi_2(t, \lambda),\ z = \Phi_3(t, \lambda)\ [0 \leqq t \leqq T]$$

L'arc $P'Q'$, défini par ces équations, doit se réduire à C, par hypothèse, pour $\lambda = 0$.

Appliquons à la portion de surface correspondant aux inégalités

$$0 \leqq t \leqq T$$
$$0 \leqq \lambda \leqq \varepsilon$$

le théorème de Stokes

$$\int Xdx + Ydy + Zdz = \iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma,$$

où u, v, w désignent le rotationnel de X, Y, Z.

6) Picard, Traité d'Analyse, t. I, 3e éd. p. 145.

Le contour se compose des arcs PQ, QQ', $Q'P'$ et $P'P$; et l'on a

$$\alpha\, d\sigma = \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\lambda)}\, dt\, d\lambda,\quad \beta\, d\sigma = \frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\lambda)}\, dt\, d\lambda,\quad \gamma\, d\sigma = \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\lambda)}\, dt\, d\lambda.$$

La formule peut donc s'écrire ainsi:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{QQ'} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{PP'} - \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{P'Q'} - \int_{PQ}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} d\lambda \int_0^T \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix} dt.$$

Faisons tendre ε vers zéro et employons, suivant l'usage, le symbole δ pour marquer l'opération $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_0 \lambda$. Nous aurons à la limite

$$\left[X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right]_P^Q - \delta\int_C Xdx + Ydy + Zdz = \int_C \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} dt,$$

autrement écrit

$$\delta\int_C Xdx + Ydy + Zdz = \left[X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right]_P^Q + \int_C \begin{vmatrix} u & v & w \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

C'est la formule générale annoncée.[7])

En particulier, si δx ne dépend pas de t et $\delta y = \delta z = 0$, on a

$$\frac{\delta}{\delta x}\int_C Xdx + Ydy + Zdz = X(Q) - X(P) + \int_C wdy - vdz.$$

Soit par exemple PQ un segment de droite parallèle à l'axe Oy et reliant les points (x, y_1, z) et (x, y_2, z). La formule précédente donnera alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_1}^{y_2} Y(x,y,z)\, dy = X(x, y_2, z) - X(x, y_1, z) + \int_{y_1}^{y_2} w(x,y,z)\, dy.$$

Nous voyons que si Y admet une dérivée partielle continue par rapport à x, il en résulte

[7]) Nous trouvons cette formule dans le Cours d'Analyse de M. Goursat (t. I, 4e éd., p. 654), établie sans l'intervention du théorème de Stokes mais au prix d'un calcul plus long.

$$X(x, y_2, z) - X(x, y_1, z) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial Y}{\partial x} dy - \int_{y_1}^{y_2} w dy;$$

donc X est dérivable par rapport à y et

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} - w$$

d'où

$$w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Ainsi l'hypothèse que les dérivées

$$\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}$$

existent et sont continues, entraîne l'existence des dérivées

$$\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial Z}{\partial x}$$

et les formules

$$u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

(Reçu le 13 novembre 1926.)

Über die irreduziblen ebenen Kurven von Maximalindex.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

1. Einleitung.

Wir verstehen unter einer Kurve eine völlig stetige geschlossene ebene Kurve, die also keinen Winkelpunkt und keine gerade Strecke hat. Die Ordnung bzw. der Index der Kurve ist die grösste bzw. kleinste Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden der Ebene getroffen werden kann. Ähnlicherweise lassen sich die Klasse und der Klassenindex der Kurve definieren.[1])

Eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex (vom Index $n-2$) ist irreduzibel, wenn sie aus einem Zuge besteht oder wenn sie ihre Züge in zwei Gruppen so einteilen lässt, dass die Summe der Ordnungen der Kurven, die von den Zügen je einer Gruppe gebildet werden, mit der Ordnung der Kurve gleich ist.[2])

Die Anzahl der Doppelpunkte, (unter denen ein einziger Doppelpunkt auch eine Spitze sein kann), für eine Kurve C n-ter Ordnung vom Maximalindex ist

$$d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p,$$

wo p das Geschlecht der Kurve C bedeutet.[3])

Das Geschlecht einer Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex ist höchstens $n-2$, sie hat also wenigstens

---

1) J. v. Sz. NAGY: „Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex", Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 32—75, Bd. 90 (1923), S. 152—153.

2) Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 62—75.

3) J. v. Sz. NAGY: „Über die charakteristischen Zahlen einer ebenen Kurve von Maximal-Klassenindex", Math. és Természettud. Értesítő, Budapest Bd. 43 (1926), S. 290—306.

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(n-2)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Doppelpunkte. Eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex hat also immer Doppelpunkte, sobald $n > 3$ ist.

Ist C_h ein Zug der Kurve C vom Maximalindex, der wenigstens einen Doppelpunkt hat, so wird er von einem Doppelpunkte Q in zwei Pseudozüge zerlegt. Der eine Pseudozug ist der geschlossene Teil von C_h, welcher von einem Punkte P durchlaufen wird, während er von dem Doppelpunkte Q ausgeht und auf C_h zum ersten Male zur Anfangslage Q zurückkehrt. Der andere geschlossene Teil von C_h ist der andere Pseudozug. Hat der eine Pseudozug noch Doppelpunkte, so lässt er sich in weitere Pseudozüge zerlegen. Man kann also den Zug C_h in Pseudozüge ohne Doppelpunkte zerlegen.

Ein Pseudozug ist eine stetige und geschlossene Kurve, er hat aber Winkelpunkte. Ein Pseudozug ist — nach unserer Definition — keine eigentliche Kurve. Die Ordnung eines Pseudozuges ist die maximale Anzahl der Punkte, in denen er von einer Geraden der Ebene getroffen werden kann. Eine Gerade durch einen Winkelpunkt trifft den Pseudozug im Winkelpunkte einfach oder zweifach, je nach dem sie im Winkelpunkte den Pseudozug durchsetzt oder nicht. Wir können die unendlichvielen durch einen Winkelpunkt Q hindurchgehenden Geraden, von denen der Pseudozug in Q nicht geschnitten wird, uneigentliche Tangenten des Pseudozuges in Q nennen.

Ein Pseudozug lässt sich durch *Abrundung*[4]) seiner Winkelpunkte in eine völlig stetige Kurve überführen. Ist AB ein den im Endlichen liegenden Winkelpunkt Q enthaltender genug kleiner Bogen des Pseudozuges, der ausser Q keine Singularität hat, und ersetzt man diesen Bogen durch einen Elementarbogen, der im von dem Bogen AB und von der Strecke AB begrenzten endlichen Gebiete liegt und den Pseudozug in A und B berührt, so rundet man den Winkelpunkt Q ab.

Zerlegt man eine Kurve vom Maximalindex durch Zerschneiden einiger Doppelpunkte in Züge und Pseudozüge ohne Doppelpunkte und rundet man die Winkelpunkte ab, so bilden die erhaltenen

[4]) C. Juel: „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung", Mém. de l'Académie Royal des Sc. et des Lettres de Danemark, 7. série. Sect. des Sc. t. XI., n⁰ 2 (1914), S. 123—125.

Züge eine Kurve, die im Allgemeinen nicht vom Maximalindex ist. Es gilt aber der folgende Satz:

Eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlechte p lässt sich durch Zerschneiden gewisser $n-2-p$ *ihrer Doppelpunkte in* $n-2$ *Züge und Pseudozüge dritter und in einen oder in keinen Zug oder Pseudozug zweiter Ordnung zerlegen, von denen auch dann eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung und vom Maximalindex gebildet wird, wenn die Winkelpunkte der Pseudozüge entsprechend abgerundet werden.*

Dieser Satz wird mit Hilfe einiger Sätze für die irreduziblen Kurven vom Maximal-Klassenindex bewiesen.

2. Über die einzügigen Kurven vom Maximal-Klassenindex.

Auf einer Doppeltangente einer einzügigen Kurve vom Maximal-Klassenindex bestimmen die zwei Berührungspunkte zwei Intervalle. Enthält das eine Intervall ausserhalb seiner Endpunkte keinen Punkt der Kurve und schneidet es die eventuelle Wendetangente der Kurve nicht, so wird dieses Intervall eine *Doppelstrecke* genannt. Aus dieser Definition folgt, dass man aus jedem Punkte einer Doppelstrecke an die Kurve n Tangenten ziehen kann, wenn n die Klasse der Kurve ist.

Auf Grund dieser Definition beweisen wir den folgenden Satz:

Hat eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex wenigstens eine Doppeltangente, so hat sie wenigstens auf einer Doppeltangente eine Doppelstrecke.

Für den Beweis dieses Satzes wollen wir zeigen, dass die einzügige Kurve K vom Maximal-Klassenindex, die keine Doppelstrecke hat, überhaupt keine Doppeltangente haben kann.

Wir nehmen erst an, dass die Kurve K wenigstens 3 Spitzen erster Art hat, dass ihre Spitzen alle im Endlichen liegen und dass die Kurve keine Wendetangente hat.

Wir bezeichnen mit $A, B, C, \ldots$ bzw. mit $AB, BC, \ldots$ die aufeinander folgenden Spitzen bzw. Bögen der Kurve K. Ist p_0 die Tangente des Bogens BC in einem dem Punkte B genug nahe liegenden Punkte P_0 und ist Q_0 der dem Punkte B nahe liegende Schnittpunkt des Bogens AB mit p_0, so liegt kein Punkt der Kurve K im Innern der endlichen Strecke P_0Q_0 auf der Tangente p_0 Bewegt sich der Punkt P von P_0 ausgehend auf der Kurve K, so bezeichnen wir den auf der Tangente p von P liegenden Punkt in den der Punkt Q_0 während der Bewegung von P übergeht, mit Q, solange bis dieser Punkt ganz bestimmt bleibt. Dasjenige von P und Q begrenzte Intervall der Tangente p, in das die endliche Strecke P_0Q_0 während der Bewegung des Punktes P übergehen kann, wird im Folgenden mit $|PQ|$ bezeichnet.

Aus den Punkten irgendeines Intervalles $|PQ|$ erreicht man in P und Q die konvexe Seite der Kurve K. Dies folgt daraus, dass eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex ohne Wendetangente ihre Ebene in zwei Gebiete T_0 und T_1 zerteilt. Aus den Punkten des Gebietes T_0 bzw. T_1 erreicht man die konkaven bzw. konvexen Seiten der Elementarbögen der Kurve K. Das Intervall $|P_0Q_0|$ liegt also in T_1.

Kein Intervall $|PQ|$ kann im Innern Punkte der Kurve K enthalten, weil sie keine Doppelstrecke hat.

Wäre nämlich $|P_1Q_1|$ in einem Bewegungssinne des Punktes P das erste der Intervalle $|PQ|$, von dem ein Punkt R der Kurve K im Innern enthalten wird, so würde die Kurve von der Tangente p_1 auch im Punkte R zweifach getroffen. Wäre nun R eine Spitze, so könnte man aus den Punkten des Teilintervalles $|P_1R|$ von $|P_1Q_1|$ im Punkte P_1 die konvexe, im Punkte R aber die konkave Seite der Kurve K erreichen. Die Kurve K müsste also von p_1 auch im Punkte R berührt werden, dann wäre aber $|P_1R|$ eine Doppelstrecke für die Kurve K.

Der Punkt Q kann ausserhalb des entsprechenden Punktes P mit keinem anderen Punkte der Kurve zusammenfallen. Fiele nämlich Q mit einem von P abweichenden Punkte der Kurve K zusammen, so wäre das betreffende Intervall $|PQ|$ eine Doppelstrecke der Kurve K, weil man aus den Punkten dieses Intervalles in Q die konvexe Seite der Kurve erreichen kann. Der Punkt Q kann also nur dann in eine Spitze fallen, wenn er mit dem entsprechenden Punkte P zusammenfällt.

Die Punkte P und Q laufen auf der Kurve K in entgegengesetzten Sinnen, weil sie in der Nähe der Spitze B entgegengesetzte Bewegungssinne haben. Änderte nämlich der Punkt Q in Q' seinen Bewegungssinn, so wäre die Tangente $P'Q'$ — gegen unsere Annahme — eine Wendetangente der Kurve K.

Hat also eine Kurve K vom Maximal-Klassenindex keine Doppelstrecke, so kann man jedem Punkte P der Kurve einen bestimmten Punkt Q zuordnen. Die Punkte P und Q haben entgegengesetzte Bewegungssinne und treffen mit einander in Spitzen der Kurve K zusammen. Bewegt sich der Punkt P auf dem Bogen AB von A ausgehend bis zum Punkte B, so gelangt derjenige Punkt Q, welcher im Punkte A mit P zusammenfällt, von A bis zum Punkte M auf einem Bogen AM, von dem keine Spitze im Innern enthalten ist. Läuft nun der Punkt P den Bogen BC von C ausgehend hindurch, so beschreibt derjenige Punkt Q, der in der Spitze C mit P zusammenfällt, den Bogen CM' ohne Spitze.

Man kann nur aus dem einen der zwei Intervalle, die auf der Tangente der Spitze B von den Punkten B und M bestimmt werden, im Punkte B die konvexe Seite der Kurve erreichen. Die Punkte B und M bestimmen also eindeutig das entsprechende Intervall $|PQ|$. Dasgleiche gilt für das von B und M' bestimmte Intervall $|PQ|$. Die Intervalle $|BM|$ und $|BM'|$ müssen also zuzammenfallen, weil sie gemeinsame Punkte haben und weil keines von ihnen Punkte der Kurve K im Innern enthalten kann. Daraus folgt, dass der Bogen CA, von dem die Spitze B nicht enthalten ist, überhaupt keine Spitze hat. Die Kurve K hat also genau 3 Spitzen.

Jede Tangente irgendeines der Bögen AB, BC und CA trifft die anderen zwei Bögen in je einem Punkte. Wäre nämlich der Bogen AB von einer Tangente p des Bogens BC ausserhalb des Punktes Q, der in B mit dem Punkte P zusammenfällt, noch getroffen und wäre R der, nach dem Punkte Q, erste Schnittpunkt des Bogens AB mit p, so hätten die Punkte Q und R entgegengesetzte Bewegungssinne. Die Tangenten p und p_1 des Bogens BC in den benachbarten Punkten P und P_1 schneiden nämlich in der Nähe der Punkte P und P_1 einander. Daraus folgt, dass die Punkte Q_1 und R_1, in denen der Bogen AB von p_1 geschnitten wird, beide entweder innerhalb, oder beide ausserhalb des Teilbogens QR von AB liegen. Die Punkte Q und R müssten also einmal auf dem Bogen AB zusammenfallen, weil der Punkt R seinen Bewegungssinn nicht verändern kann. Dies ist aber für die Kurve K unmöglich.

Man kann aus dem Punkte A keine Tangente an den Bogen BC und ausser der Spitzentangente in A keine weitere Tangente an die Bögen AB und AC ziehen. Dies folgt aus den bewiesenen Lagenbeziehungen zwischen den Punkten P und Q. Die Kurve K

ist also dritter Klasse, weil man aus A an sie nur die Spitzentangente ziehen kann, die aus A eine dreifach zu rechnende Tangente ist.

Für eine Kurve n-ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die r Spitzen, d Doppeltangenten, (unter denen eine auch eine Wendetangente sein kann), und das Geschlecht p hat, gelten die Gleichungen[5]:

$$r = n - 2 + 2p \text{ und } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Eine Kurve K, die wenigstens 3 Spitzen hat, hat genau 3 Spitzen und ist von dritter Klasse. Sie hat also keine Doppeltangente.

Auch für die Kurven K vom Maximal-Klassenindex, die höchstens 2 Spitzen, aber keine Doppelstrecke haben, gelten die bewiesenen folgenden Behauptungen:

Wird die Kurve K von einem Punkte P aus der Spitze A ausgehend durchlaufen und ist Q derjenige von der Tangente des Punktes P aus K ausgeschnittene Punkt, der in der Spitze A mit P zusammenfällt, so haben die Punkte P und Q entgegengesetzte Bewegungssinne und treffen erst in einer von A abweichenden Spitze B mit einander zusammen. Bezeichnet γ_1 bzw. γ_2 den inzwischen von P bzw. Q durchlaufenen Bogen der Kurve K, dessen Endpunkte A und B sind, so wird der Bogen γ_2, der keine Spitze hat, von jeder Tangente des Bogens γ_1 in einem Punkte getroffen.

Daraus folgt, dass die Kurve K wenigstens 2 Spitzen hat. Sie kann aber auch zwei Spitzen nicht haben. Hätte sie nämlich nur die Spitzen A und B, so wäre jeder der Bögen γ_1 und γ_2 von einer Tangente des anderen Bogens in einem Punkte getroffen und so wären die Bögen γ_1 und γ_2 von den Spitzentangenten ausserhalb der Spitzen nicht getroffen. Dies ist aber unmöglich, weil die Kurve K eine paare Kurve ist.

Eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex ohne Wendetangente hat also nur dann keine Doppelstrecke, wenn sie dritter Klasse ist und 3 Spitzen hat oder wenn sie überhaupt keine Spitzen hat. In diesem letzten Falle ist die Kurve K von zweiter Ordnung. Dies folgt aus den Gleichungen

$$r = n - 2 + 2p \text{ und } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p,$$

weil das Geschlecht einer einzügigen Kurve vom Maximal-Klassen-

[5]) S. die Fussnote [3]).

index 0 oder 1 ist. In diesen zwei Fällen und nur in diesen haben die Kurven auch keine Doppeltangente.

Es sei nun K' eine einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex mit einer Wendetangente und ohne Doppelstrecken. Die Wendetangente kann die Kurve K' ausserhalb des Wendepunktes nicht schneiden, weil sie vom Maximal-Klassenindex ist. Sie kann aber K' auch nicht berühren. Widrigenfalls gäbe es nämlich auf der Wendetangente wenigstens eine Doppelstrecke.

Sind $A, B, C, \ldots$ die Aufeinanderfolge des Wendepunktes A und der Spitzen $B, C, \ldots$ auf der Kurve und geht der Punkt P auf dem Bogen AB ohne Spitze von B ausgehend bis zum Wendepunkte A, so gelangt derjenige Punkt der Kurve, der in B mit P zusammenfällt bis zum Punkte A. Inzwischen — auf Grund der Vorigen — kann der Punkt Q durch keine Spitze hindurchgehen und kann seinen Bewegungssinn nicht verändern, weil die Kurve K' von der Wendetangente ausserhalb A nicht getroffen wird.

Hat also die Kurve K' keine Doppelstrecke, so hat sie nur eine Spitze (im Punkte B). In diesem Falle ist K' von dritter Klasse und hat keine eigentliche Doppeltangente, wie es aus den Gleichungen

$$r = n - 2 + 2p \text{ und } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p,$$

folgt. Jede andere einzügige Kurve vom Maximal-Klassenindex mit Wendetangente hat eigentliche Doppeltangenten.

Damit ist unser Satz für einzügige Kurven vom Maximal-Klassenindex vollständig bewiesen.

3. Über die irreduziblen Kurven vom Maximal-Klassenindex.

Hat eine irreduzible Kurve C n-ter Klasse vom Maximal-Klassenindex k Züge: $C_1, C_2, \ldots, C_k$, so wird ihre Ebene durch diese k Züge und durch die eventuelle Wendetangente der Kurve in $k+1$ Gebiete $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_k$ zerteilt. Das Gebiet T_0, aus dessen Punkten $n-2$ Tangenten an die Kurve gehen, wird von den sämtlichen Zügen und von der eventuellen Wendetangente begrenzt. Die Grenze des Gebietes T_h $(h = 1, 2, \ldots, k)$ besteht aus dem Zuge C_h und aus der eventuellen Wendetangente dieses Zuges C_h.

Wäre nämlich das Gebiet T_h $(h > 0)$ von zwei Zügen der Kurve C begrenzt, so wären die Punkte des Gebietes T_0, die auf den konkaven Seiten der betreffenden zwei Zügen liegen, durch das Gebiet T_h voneinander getrennt. Das Gebiet T_0 wäre also nicht zusammenhängend und die Kurve C wäre also reduzibel.[6])

Jeder Zug einer Kurve vom Maximal-Klassenindex ist wieder eine Kurve vom Maximal-Klassenindex. Die Doppelstrecken der Züge einer Kurve C vom Maximal Klassenindex werden Doppelstrecken der Kurve C genannt.

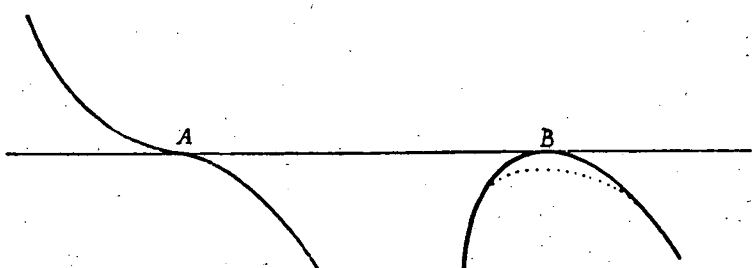
Die Doppelstrecken des Zuges C_h liegen im Innern oder an der Grenze des Gebietes T_h, aus dessen Punkten die maximale Anzahl der Tangenten an C_h und zugleich an C kann. Daraus folgen die Sätze:

Die Doppelstrecken einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex werden von der Kurve und von ihrer eventuellen Wendetangente nicht geschnitten.

Aus jedem Punkte einer Doppelstrecke, die zu einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex gehört, gehen n Tangenten an die Kurve.

Zwei Doppelstrecken einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex können einander nur dann schneiden, wenn sie zugleich Doppelstrecken eines und desselben Zuges der Kurve sind.

Der Einfachkeit halber nehmen wir im Folgenden an, dass die Kurve C vom Maximal-Klassenindex mit der Wendetangente a ausserhalb des Wendepunktes A von a nicht berührt wird. Ist nämlich die endliche Strecke AB eine Doppelstrecke der Kurve C, so hat die Kurve in der Nähe der Punkte A und B die Form der



Figur. Wäre nämlich der genug kleine den Punkt B enthaltende Elementarbogen B_1B_2 auf der anderen Seite der Wendetangente a gelegen, so könnte man von der konvexen Seite der Kurve

[6]) Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 63—64.

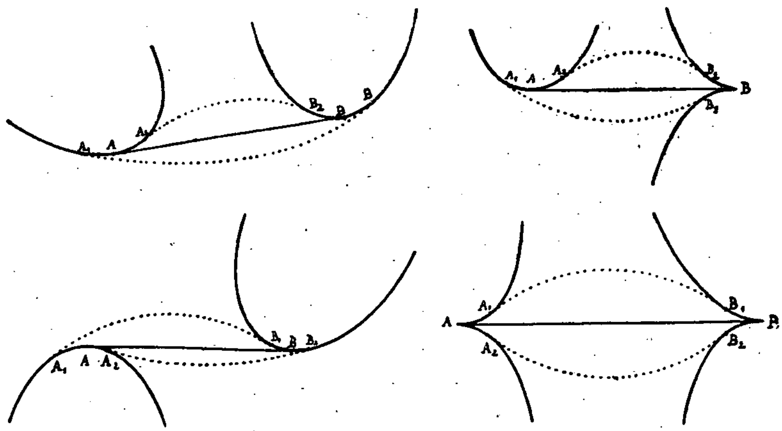
die konkave erreichen, ohne die Kurve oder ihre Wendetangente überschreiten zu müssen.

Ersetzen wir den Elementarbogen B_1B_2 mit dem punktierten Elementarbogen B_1B_2, so erhalten wir eine Kurve C' vom Maximal-Klassenindex, für welche die Klasse, der Klassenindex und die Anzahl der Singularitäten dieselben sind, wie für die Kurve C. Diese Kurve C' hat mit a um Eins weniger Berührungspunkte, als die Kurve C. Damit ist die Berechtigung der Annahme nachgewiesen.

Liegt eine Doppelstrecke s mit den Endpunkten A und B im Gebiete T_h und schliesst man sie der irreduziblen Kurve C vom Maximal-Klassenindex doppelt bei, so kann man sie die zwei Ufer eines unendlich schmalen Querschnittes q im Gebiete T_h betrachten. Dieser Querschnitt q ist für das Gebiet T_0, aus dessen Punkten $n-2$ Tangenten an die Kurve C gezogen werden können, eine Brücke, von der die Punkte A und B des Randes C_h verbunden werden. Diese Brücke vermehrt den Zusammenhang des Gebietes T_0 um Eins.

Das ebene Gebiet T_h ist einfach oder zweifach zusammenhängend, weil es von einem Rande begrenzt wird. Das Gebiet T_h wird also durch den Querschnitt q entweder in zwei einfach zusammenhängende Gebiete zerteilt oder in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandelt. Demgemäss wird der Zug C_h entweder in zwei Pseudozüge zerteilt oder in einen Pseudozug verwandelt. Diese Pseudozüge sind uneigentliche Kurven, weil sie eine gerade Strecke s haben.

Die uneigentliche Kurve $\bar{C}$, in welche die Kurve C durch den Querschnitt q verwandelt wird, lässt sich durch stetige Deformation in eine eigentliche Kurve C' vom Maximal-Klassenindex überführen. Sind A und B die Endpunkte der endlichen Strecke s, so ersetzen wir diese Strecke und die dieser Strecke anschliessenden genug kleinen Elementarbögen der Kurve AA_1 und BB_1 bzw. AA_2 und BB_2 durch einen Elementarbogen A_1B_1 bzw. A_2B_2. Diese Elementarbögen liegen in dem längs des Querschnittes q zerschnittenen Gebiete T_h, schmiegen sich an die Ufer des Querschnittes q eng genug an, haben mit einander und mit der eventuellen Wendetangente keinen gemeinsamen Punkt, mit der Kurve C ausserhalb der Punkte A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2, wo sie die Kurve C berühren, keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Die folgenden vier



Figuren zeigen hinreichend deutlich die möglichen Formen der Kurven $\overline{C}$ und C' in der Nähe der Doppelstrecke AB. Die Elementarbögen A_1B_1 und A_2B_2 sind in den Figuren punktierte Linien.

Die Kurve C' ist vom Maximal-Klassenindex, weil man aus einem Punkte der Ebene entweder die konvexen oder die konkaven Seiten der Elementarbögen, (von denen die Kurve zusammengesetzt ist), erreichen kann, ohne die Kurve oder ihre eventuelle Wendetangente zu überschreiten. Die Kurven C und C' haben dieselben auf der Doppelstrecke senkrecht stehenden Tangenten; daraus folgt, dass ihre Klassen übereinstimmen.

Das Gebiet T_0', aus dessen Punkten an die Kurve C' $n-2$ Tangenten gehen, ist zusammenhängend und ensteht aus T_0 durch die Anwendung einer Brücke. Daraus folgt, dass die Kurve C' irreduzibel und vom Geschlechte $p+1$ ist, wenn p das Geschlecht der Kurve C ist. Hat die Kurve C bzw. C' r bzw. r' Spitzen, so ist $r'=r+2$.

Das Verfahren, wodurch eine Doppelstrecke der Kurve C aufgehoben wurde, lässt sich auch auf die Kurve C' anwenden, wenn sie Doppelstrecken hat. Durch μ-malige Anwendung dieses Verfahrens geht die Kurve C vom Geschlechte p in eine irreduzible Kurve $C^{(\mu)}$ n ter Klasse vom Maximal-Klassenindex und vom Geschlechte $p+\mu$ über. Hat nun die Kurve $C^{(\mu)}$ keine Doppelstrecke, so besteht sie aus Zügen dritter Klasse und aus Ovalen. Für eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Maximal-Klassenindex ist die Summe der Klassenindizes $n-2$ ist.[7]) Daraus folgt, dass die

[7]) Vgl. Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 66.

Kurve $C^{(\mu)}$ $n-2$ Züge dritter Klasse mit je drei Spitzen hat. Sie kann noch ein oder kein Oval haben.[8])

Das Gebiet $T_0^{(\mu)}$ ensteht also, wenn man entweder aus der ganzen Ebene oder aus dem Inneren eines Ovales die $n-2$ von den Zügen dritter Klasse begrenzten einfach zusammenhängenden Gebiete entfernt. Dieses Gebiet $T_0^{(\mu)}$ ist $n-1$-fach zusammenhängend. Das Geschlecht der Kurve $C^{(\mu)}$ ist also $n-2$. Daraus folgt, dass $\mu = n-2-p$ ist.

Damit ist der Duale des in der Einleitung für irreduzible Kurven vom Maximalindex ausgesprochenen Satzes vollständig bewiesen. Aus dem Beweise folgt auch der Satz:

Eine irreduzible Kurve n-ter Klasse vom Maximal-Klassenindex und vom Geschlechte p hat wenigstens $n-2-p$ *Doppelstrecken.*

4. Über die irreduziblen Kurven vom Maximalindex.

Ist C_h ein Zug n_h-ter Ordnung einer irreduziblen Kurve C n-ter Ordnung vom Maximalindex, so begrenzen die zwei Tangenten eines seiner Doppelpunkte zwei Winkelräume. Wird der Zug C_h von jeder Geraden des einen Winkelraumes in n_h Punkten getroffen, so wird dieser Winkelraum ein *Doppelwinkel des Zuges* C_h und zugleich *ein Doppelwinkel der Kurve C* genannt. Diese Definition lässt sich auch auf den Fall mehrfacher Punkte ausdehnen.

Auf Grund der Vorigen mit Hilfe des Dualitätsprinzips ausser dem in der Einleitung ausgesprochenen Satze folgen auch die Sätze:

Hat eine irreduzible Kurve vom Maximalindex wenigstens einen Doppelpunkt, so hat sie wenigstens einen Doppelwinkel.

Eine irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlechte p hat wenigstens $n-2-p$ *Doppelwinkel.*

Die irreduzible Kurve C n-ter Ordnung vom Maximalindex wird von jeder Geraden, die in einen Doppelwinkel fallen, in n Punkten getroffen.

Ist g eine Gerade, die in zwei Doppelwinkeln liegt, so gehören diese Doppelwinkel zu zwei Doppelpunkten eines und desselben Zuges.

(Eingegangen am 31. XII. 1926.)

[8]) Vgl. Math. Ann. Bd. 89 (1923), S. 52.

Operationskalkül von Heaviside und Laplacesche Transformation.

Von TIBOR v. STACHÓ in Budapest.

Zur Behandlung von — gewöhnlichen oder partiellen — *linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* wird in der theoretischen Telegraphie seit einigen Jahren ein kühner, von OLIVER HEAVISIDE[1]) eingeführter Operationskalkül angewandt. Diese Methode wird an einigen *Beispielen* in § 1 besprochen werden. Es sei aber schon hier bemerkt, dass sie sich einer uralten Idee bedient, indem sie die Zeichen $\frac{d^k}{dt^k}$ bezw. $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ rein formal durch die k-te Potenz eines Parameters s ersetzt und von der Lösung des so vereinfachten Problems auf jene der ursprünglichen Fragestellung schliesst. Bedeutend früher und wesentlich tiefer hat CAUCHY[2]) vor HEAVISIDE in diese Rechnungsweise Einblick gewonnen. Dass wir trotzdem HEAVISIDE gedenken, erklärt der Umstand, dass er auch Regeln zur asymptotischen Entwicklung der Lösung angibt und somit die symbolische Methode selbst zur Diskussion des „Endverlaufes" in einigen Fällen heranzieht; Voraussetzungen und Beweise fehlen aber vollständig bei HEAVISIDE.

Es ist erst unlängst Herrn N. WIENER[3]) gelungen einen strengen Operationskalkül aufzubauen. Er benützt aber den LEBESGUEschen Integralbegriff, tiefliegende alte und neue Integraldarstellungen und streift bloss die Anwendungsmöglichkeit zur Behandlung von

---

[1]) HEAVISIDE, O.: Electromagnetic Theory. (London, 1893—1912). Siehe insbes. Bd. II. (1899).

[2]) Vgl. z. B. dessen Mémoire sur le Calcul Intégral (1850). Ouvres (1) 2

[3]) WIENER, N.: The Operational Calculus. Math Ann. 95 (1926), S 557—584.

Differentialgleichungen. Einfacher und sich ganz auf HEAVISIDES Verfahren stützend nimmt Herr P. LÉVY[4]) die Frage in Angriff. Leider werden aber so die nicht analytischen Lösungen des Problems nicht erfasst und die Asymptotik kommt nicht einen Schritt über HEAVISIDE hinaus.

Wir wollen uns in den Folgenden mit einer dritten Richtung beschäftigen, welche die Beziehung des HEAVISIDEschen Kalküls — kurz *H-Kalküls* — zu der so mannigfaltig benützten LAPLACE-*schen Transformation* — kurz *L-Transformation* — feststellt. Dieser Standpunkt wird von Herrn J. R. CARSON[5]) vertreten. Seine Ausführung ist aber rein formal und kann, was die asymptotischen Entwicklungen anbelangt — nach dem Verfasser selbst — „not be regarded as a satisfactory discussion and is indeed almost as heuristic as HEAVISIDE's own procedure."

§ 2 bringt die Zusammenstellung bekannter Sätze über eine Klasse von L-Transformationen. In § 3 werden mit Hinweis auf die Untersuchungen der Herren F. BERNSTEIN und G. DOETSCH[6]) die in § 1 erwähnten partiellen Differentialgleichungen im Lichte der L-Transformation gestreift.

Entscheidend in dieser Richtung muss aber eine Arbeit von Herrn A. HAAR[7]) genannt werden. Die Methode von Herrn HAAR erlaubt nähmlich die asymptotische Entwicklung von Funktionen aus den Singularitäten ihrer L-Transformierten herzuleiten. Dadurch können nicht nur — wie § 4 zeigt — die asymptotischen Regeln des H-Kalküls streng behandelt, sondern — worauf wir aber hier verzichten — deren Anzahl auch beträchtlich vermehrt werden.

---

[4]) LÉVY, P.: Le calcul symbolique de Heaviside. Bull. des sc. math. (2) 50 (1926), S. 174—192.

[5]) CARSON, J. R.: The Heaviside Operational Calculus. Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1926), S. 43—68.

[6]) *a)* DOETSCH, G.: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Ann. 89 (1923), S. 192—207., sowie *b)* teilweise mit F. BERNSTEIN: Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 289—306.

[7]) HAAR, A.: Über asymptotische Entwicklung von Funktionen. Math. Ann. 96 (1926), S. 59—107.

§ 1.

Der Operationskalkül von Heaviside.

Man ersetzt in der vorgelegten Differentialgleichung zunächst das Zeichen $\frac{d^k}{dt^k}$ bezw. $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ rein formal durch die k-te Potenz eines Parameters s. Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1) \qquad D[u] \equiv a_n \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 u = b(t)$$

wird dadurch in die symbolische *algebraische* Gleichung

$$(1^*) \qquad C(s)\, u = b$$

überführt. $C(s)$ bezeichnet die linke Seite der zu (1) gehörigen charakteristischen Gleichung

$$(2) \qquad C(s) \equiv a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Handelt es sich aber etwa um die Telegraphengleichung

$$(3) \qquad D[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ac \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (ad + bc) \frac{\partial u}{\partial t} - bdu = 0,$$

in welcher die nicht negativen Konstanten a, b, c, d der Reihe nach die Induktivität, den Widerstand, die Kapazität und die Ableitung des linearen Leiters für die Längeneinheit bezeichnen, so wird man auf eine symbolische *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$(3^*) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - (as + b)(cs + d)\, u = 0$$

mit dem Parameter s geführt.

Löst man nun die Gleichungen (1*), (3*), in welchen die Variable t (die Zeit) explicite nicht vorkommt, so wird

$$(4^*) \qquad u = \frac{b}{C(s)}$$

bezw.

$$(5^*) \qquad u = u_0 e^{-xr} \text{ mit } r^2 = (as + b)(cs + d)$$

Bei der Gleichung (3*) beschränken wir uns somit auf die partikuläre Lösung, der man sich beim einseitig unbegrenzten ($x \geqq 0$) Leiter bedient. Sie stellt *symbolisch* die Spannung in einem solchen Leiter dar, wenn im Punkte $x = 0$ die konstante Spannung u_0 angelegt wird. Wir werden sie in den Fällen $a = d = 0$, $bc \neq 0$ bezw. $d = 0$, $ac \neq 0$ genauer besprechen. Vorläufig wollen wir diese Rechnungsweise im Falle $d = 0$, $ac \neq 0$ weiterführen.

Die Stromstärke v in einem einseitig unbegrenzten Leiter ändert sich mit der Spannung u gemäss

(6) $$a\frac{\partial v}{\partial t}+bv=-\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder in symbolischer Gestalt

(6*) $$(as+b)\,v=ru_0e^{-xr},$$

wenn schon (5*) berücksichtigt wird. Da jetzt $r=\sqrt{cs(as+b)}$ ist, wird

$$v=u_0e^{-xr}\sqrt{\frac{cs}{as+b}},$$

insbesondere an der Entrittsstelle $x=0$:

(7*) $$v=u_0\sqrt{\frac{cs}{as+b}}.$$

Es ergibt sich somit die Aufgabe: Man soll I) aus der analytischen Gestalt der symbolischen Lösung in s, jene der eigentlichen Lösung in t bestimmen,

II) aus dem analytischen Verhalten der symbolischen Lösung in s über den asymptotischen Charakter der eigentlichen Lösung in Bezug auf t Aufschluss gewinnen.

Die an den erwähnten Beispielen vorgeführte symbolische Rechnungsweise war — wie erwähnt — lange vor Heavisice bekannt und die Aufgabe I) mannigfach gelöst worden. Wir wenden uns daher der zweiten Aufgabe zu und erwähnen die beiden folgenden Regeln von Heaviside.

A) Wenn die symbolische Lösung in die Reihe

$$H(s)\sqrt{s}=(a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots)\sqrt{s}$$

entwickelt werden kann — wie z. B. (7*) —, so erhält man die Lösung der ursprünglichen Gleichung in der Gestalt einer asymptotischen Entwicklung, indem man $\sqrt{s}$ durch $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ und s^k durch $\frac{d^k}{dt^k}$ ersetzt, also

(8) $$\begin{aligned} u(t) &\sim \left(a_0+a_1\frac{d}{dt}+a_2\frac{d^2}{dt^2}+\ldots\right)\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left(a_0-\frac{a_1}{2t}+1.3\frac{a_2}{(2t)^2}-1.3.5\frac{a_3}{(2t)^3}+\ldots\right). \end{aligned}$$

B) Lässt sich dagegen die symbolische Lösung nur nach geraden *und* ungeraden Potenzen von $\sqrt{s}$ entwickeln — wie z. B (5*) im Falle $d=0$, $b\neq 0$ — also in die Reihe

$$H(\sqrt{s})=b_0+b_1\sqrt{s}+b_2(\sqrt{s})^2+\ldots,$$

so entferne man einfach alle Glieder mit *positiven* ganzzahligen Potenzen von s und auf den so erhaltenen Teil

$$b_0+(b_1+b_3 s+b_5 s^2+\ldots)\sqrt{s}$$

wende man wieder die Regel *A)* an, die also

$$(9)\quad u(t)\sim b_0+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left(b_1-\frac{b_3}{2t}+1.3\frac{b_5}{(2t)^2}-1.3.5\frac{b_7}{(2t)^3}+-\ldots\right)$$

ergibt.

§ 2.

Die Laplacesche Transformation.

1. Es bezeichne $f(t)$ eine in jedem endlichen, nicht negativen Intervall integrierbare Funktion. Wenn das Integral

$$(10)\qquad F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

im Punkte $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ konvergiert, so konvergiert es auch für alle s mit dem reellen Teil $R(s)=\sigma>\sigma_0$ und stellt in dieser Halbebene eine reguläre Funktion $F(s)$ dar. F wird die *Laplacetransformierte* von f genannt und mit $F=L(f)$, genauer $F(s)=L(f(t))$ bezeichnet.

(10) stellt als Funktionaloperation eine Beziehung zwischen zwei Funktionenbereichen dar. Nach einer Bezeichnungsweise von Herrn DOETSCH[8]) gehört f dem *Oberbereich*, F dagegen dem *Unterbereich* an. Sollte (10) absolut konvergieren, so sagen wir f gehöre dem *verengten* Oberbereich an.[9])

2. Die L-Transformation ist eine lineare Funktionaloperation.

3. Ist

$$f_1 * f_2(t)=\int_0^t f_1(t_1)\,f_2(t-t_1)\,dt_1=f_2 * f_1(t)$$

die *Faltung* von f_1 und f_2, so ist

$$(11)\qquad L(f_1 * f_2)=L(f_1)\,L(f_2),$$

d. h. der Faltung im *verengten* Oberbereich entspricht die Multiplikation im Unterbereich.

4. Ist $f^{(\nu)}(t)$ eine Oberfunktion und $f^{(\nu-1)}(t)$ bei $t=0$ stetig, so gehört auch $f^{(\nu-1)}$ und alle Ableitungen niedriger Ordnung samt

---

[8]) DOETSCH: a. a. O. [6]) a).

[9]) Da wir gleichzeitig nur endlich viele voneinander wesentlich verschiedene (vgl. 5.) Funktionen betrachten werden, braucht die Konvergenzhalbebene des betr Funktionenbereiches nicht ausdrücklich angegeben werden.

f dem (sogar verengten) Oberbereich an und es gilt:

(12) $L(f^{(\nu)}) = s^\nu L(f) - [f(0)\, s^{\nu-1} + f'(0)\, s^{\nu-2} + \ldots + f^{(\nu-1)}(0)]$.

Bei Beachtung des Umstandes, dass für $\mu = 0, 1, \ldots \nu - 1$: $f^{(\mu)}(t) = O(e^{\alpha t})$ mit festem α ist, ergibt sich der Beweis durch Produktintegration.[10])

5. Zu jeder *Oberfunktion* ist die *Unterfunktion* eindeutig bestimmt. Zu einer Unterfunktion gehören dagegen unendlich viele Oberfunktionen, die sich aber nur durch Nullfunktionen $n(t)$ mit der Eigenschaft $\int\limits_0^t n(t_1)\, dt_1 \equiv 0$ unterscheiden können.

Zum Schluss noch ein einfacher Satz über die Faltung von Funktionen. Wenn für $t \geqq 0$ die Funktion f_0 stetig ist, die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ einmal stetig differenzierbar sind, so ist

$$\Phi(t) = f_0 * f_1 * \ldots * f_n(t)$$

vorhanden, n-mal stetig differenzierbar u. zw.

$$(13) \qquad \Phi^{(\nu)}(t) = \begin{cases} f_0 * (f_1 * \ldots * f_n)^{(\nu)}, & \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \\ f_0 * (f_1 * \ldots * f_n)^{(\nu)} + f_0(t) f_1(0) \ldots f_n(0), & \nu = n \end{cases}$$

Offenbar ist dann

$$(14) \qquad \Phi^{(\nu)}(0) = \begin{cases} 0, & \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \\ f_0(0) f_1(0) \ldots f_n(0), & \nu = n. \end{cases}$$

Für $n = 1$ folgt der Satz aus dem elementaren Satz über Differentiation eines Integrals nach einem Parameter, für den allgemeinen Fall dann mit Schluss von n auf $n+1$.

§ 3.

H-Kalkül und L-Transformation.

Beschränken wir uns — um die Ideen zu fixieren — auf die in § 1 erwähnten Probleme der Kabeltelegraphie und setzen wir in Gleichung (3) gleich $d = 0$, da die Heavisideschen Regeln *A), B)* nur in diesem Falle angewendet werden können.

Es sei vorausgesetzt, dass (3) für $x > 0$, $t > 0$ (mit Ausnahme von singulären Wertepaaren, für welche bei der hyperbolischen Differentialgleichung Diskontinuitäten der „Lösung" auftreten können) eine solche Lösung besitzt, welche die Randbedingungen

---

[10]) Ein eleganter Beweis für den Fall, dass f dem verengten Oberbereich angehört, findet sich bei Doetsch a. a. O. [6]) a).

$$u(x, t) \to 0, \ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \to 0 \text{ für } t \to 0, \ x \neq 0$$

$$u(x,t) \to u_0 \text{ (konst.) für } x \to 0, \ t > 0, \ u(x, t) \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

erfüllt, und bei welcher $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — und somit, nach § 2, $\frac{\partial u}{\partial t}$ und u — dem Oberbereich angehört, kurz alle weiter bis (5**) angeführten Operationen erlaubt sind. Überführt man nun (3) in ihre L-Transformierte, indem man sie mit e^{-st} multipliziert und dann von 0 bis ∞ nach t integriert, so gewinnt man die Gleichung

$$\text{(3**)} \qquad \frac{d^2 U}{a x^2} - (as + b) cs\, U = 0;$$

dieser muss $U = L(u)$ mit den Randbedingungen

$$U(x, s) \to \frac{u_0}{s} = L(u_0) \text{ für } x \to 0, \ U(x, s) \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

genügen. Es ergibt sich so

$$\text{(5**)} \qquad U = \frac{u_0}{s} e^{-xr} \text{ mit } r^2 = (as + b) cs.$$

Was nun den Fall $a = 0$, $bc \neq 0$ anbelangt, in welchem (3) in die lineare Wärmeleitungsgleichung übergeht, stellt (5**) tatsächlich die Unterfunktion der gesuchten Lösung dar.[11])

Den Fall $ac \neq 0$ wollen wir näher betrachten. Aus

$$\text{(15)} \quad \frac{e^{-x\sqrt{(as+b)cs}}}{\sqrt{(as+b)cs}} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \int_{x\sqrt{ac}}^{\infty} e^{-\frac{b}{2a}t} J_0\left(\frac{b}{2a}\sqrt{acx^2 - t^2}\right) e^{-st}\, dt$$ [12])

— wo J_0 die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung bezeichnet — gewinnt man nach (11)

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{s}\frac{e^{-xr}}{r} = \int_0^{\infty} (1 * w(t))\, e^{-st}\, dt$$

mit

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < x\sqrt{ac} \\ \dfrac{1}{\sqrt{ac}} e^{-\frac{b}{2a}t} J_0\left(\dfrac{b}{2a}\sqrt{acx^2 - t^2}\right), & t \geqq x\sqrt{ac}. \end{cases}$$

Nach — offentsichtlich erlaubter — Differentiation in Bezug auf x ergibt sich aus (16) somit, dass (5**) die Unterfunktion von

[11]) Doetsch, a. a. O. [6]) b) S. 304.

[12]) Diese aus einer bekannten Formel fliessende Integraldarstellung benützt auch Herr Carson a. a. O. Man beachte jedoch den Unterschied der hier und dort gegebenen Herleitung.

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t<x\sqrt{ac}\\ u_0 e^{-x\frac{b}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}}+u_0 x\frac{b}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\int\limits_{x\sqrt{ac}}^{t}\frac{e^{-\frac{bt}{2a}}J_1\left(\frac{b}{2a}\sqrt{acx^2-t^2}\right)}{\sqrt{acx^2-t^2}}dt, & t\geqq x\sqrt{ac}\end{cases}$$

darstellt; dies ist tatsächlich die bekannte Lösung von (3) bei den angegebenen Randbedingungen.

Nach diesen Bemerkungen kann das an (6) anschliessende Problem rasch erledigt werden. Was zunächst die Lösung von (6) mit der Anfangsbedingung $v(x,t)\to 0$ für $t\to 0$, $x>0$ anbelangt, unterwerfe man (6) in dem oben angegebenen Sinne der L-Transformation. Dann muss also $V=L(v)$ der linearen algebraischen Gleichung

$$(6^{**})\qquad (as+b)\,V=r\frac{u_0}{s}e^{-xr}$$

genügen, wenn schon (5^{**}) berücksichtigt worden ist. Es ergibt sich so

$$V=\frac{u_0}{s}\sqrt{\frac{cs}{as+b}}\,e^{-x\sqrt{(as+b)cs}}$$

Aus (15) ersieht man, dass die zu V gehörige Oberfunktion v die u_0c-fache der oben angegebenen Funktion $w(t)$ ist, und so die bekannte Lösung von (6) darstellt, sowie, dass der Grenzwert von V für $x\to 0$, d. h.

$$(7^{**})\qquad \frac{u_0}{s}\sqrt{\frac{cs}{as+b}}$$

als Unterfunktion dem Randwert von $v(x,t)$ für $x\to 0$, $t>0$ gehört.

Der Vergleich der Formel (5^*) mit (5^{**}), bezw. (7^*) mit (7^{**}) zeigt, dass die mit s multiplizierte L-Transformierte der betr. Funktionen mit ihrer *symbolischen Gestalt* übereinstimmt.

§ 4.

Die asymptotischen Entwicklungen von Heaviside.

Wir wollen nun die Heavisideschen Regeln *A)* und *B)* unter den folgenden Voraussetzungen streng beweisen.

Es sei vorausgesetzt, dass die symbolische Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf die mit s multiplizierte L-Transformierte $U(s)$ der für hinreichend grosse

Werte des Argumentes stetigen Lösung $u(t)$ führt, und selbst die Gestalt

A) $$u = H(s)\sqrt{s}$$

bezw.

B) $$u = H(\sqrt{s}) \text{ besitzt.}$$

Es sei noch im Falle $A)$

für $R(s) > 0$

a) $H(s)$ regulär,

b) in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite gleichmässig $H(s) = o(\sqrt{s})$,

c) entlang jeder Vertikalen $\frac{H(s)}{\sqrt{s}}$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter.[13])

Längs der imaginären Achse sei

d) $H(s)$ regulär insbesondere in $s = 0$ $H(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu s^\nu$,

e) $H^{(\nu)}(s) = o(\sqrt{s})$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$,

f) $\frac{H^{(n)}(s)}{\sqrt{s}}$ und $\frac{H^{(n-1)}(s)}{s\sqrt{s}}$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter. Dann ist

(17) $$\lim_{t \to \infty} t^n \left[u(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \frac{1 \cdot 3 \ldots (2\nu - 1)}{(2t)^\nu} \right] = 0.$$

Im Falle $B)$ sei

für $R(s) > 0$

a) $H(s)$ regulär,

b) in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite gleichmässig $H(\sqrt{s}) = o(s)$,

c) entlang jeder Vertikalen $\frac{H(\sqrt{s})}{s}$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter.

---

[13]) $\varphi(s) = \varphi(\sigma + i\tau)$ wird von Herrn HAAR a. a. O. [7]) längs der Vertikalen $\sigma = \gamma$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter genannt, wenn bei jeder noch so kleinen Zahl δ für alle $t \geq T$ und hinreichend grosse positive ω

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{it\tau} \varphi(\gamma + i\tau)\, d\tau \right| < \delta$$

ausfällt, sobald $\alpha \geqq \omega$ und $\beta \geqq \omega$ bzw. $\alpha \leqq -\omega$ und $\beta \leqq -\omega$ ist.

Längs der imaginären Achse sei

d) $H(s)$ regulär, insbesondere in $s=0: H(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu s^\nu$,

e) $H^{(\nu)}(\sqrt{s})=o((\sqrt{s})^{\nu+1})$ für $\nu=0,1,\dots n-1$,

f) $\dfrac{H^{(n)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{n+2}}$ und $\dfrac{H^{(n-1)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{n+3}}$ für hinreichend grosse t bei $\tau=\pm\infty$ vom Fourierschen Charakter. Dann ist

$$(18)\quad \lim_{t\to\infty} t^n\left[u(t)-b_0-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu b_{2\nu+1}\frac{1.3\dots(2\nu-1)}{(2t)^\nu}\right]=0.$$

Beweis: *A)* Unter den angeführten Bedingungen ist mit Rücksicht auf

$$U^{(\nu)}(s)=\frac{H^{(\nu)}(s)}{\sqrt{s}}+d_1\frac{H^{(\nu-1)}(s)}{s\sqrt{s}}+\dots+d_\nu\frac{H(s)}{s^\nu\sqrt{s}}$$

auf der imaginären Achse $U^{(\nu)}(s)=o(1)$ mit $\nu=0,1,\dots n-1$ und $U^{(n)}(s)$ für hinreichend grosse t bei $\tau=\pm\infty$ vom Fourierschen Charakter. Subtrahiert man ferner von $U(s)$ die mit s multiplizierte n-te Teilsumme der Taylorschen Entwicklung von $H(s)$ um $s=0$, so versehwindet die Differenz an der Stelle $s=0$ von der $n+\frac{1}{2}$-ter Ordnung; es ist daher in

$$U(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu s^\nu+W(s)$$

$W^{(n)}(s)$ auf der imaginären Achse stetig. Zieht man noch die aus *a), b), c)* fliessenden Voraussetzungen für $U(s)$ innerhalb $R(s)>0$ heran, so folgt nach einem Satz[14]) von Herrn Haar

$$\lim_{t\to\infty} t^n\left[u(t)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}t^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right]=0.$$

Nach der bekannten Relation

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+\nu)}{x(x+1)\dots(x+\nu-1)}$$

ist aber

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)=(-1)^\nu 2^\nu\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1.3\dots(2\nu-1)}=(-1)^\nu\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{1.3\dots(2\nu-1)},$$

[14]) a. a. O. [7]) S. 85. Der Satz ist dort unter der doppelten Voraussetzung über die Oberfunktion $u(t)$ ausgesprochen, dass sie stetig und in jedem endlichen Bereich von beschränkter Schwankung ist. Die genaue Verfolgung des ebendort mitgeteilten Beweises zeigt aber, dass die erste Bedingung nur für hinreichend grosse t-Werte benützt wird, und die zweite — wenn sie auch in den Anwendungen immer erfüllt ist — entbehrt werden kann.

somit die in (17) angegebene asymptotische Entwicklung tatsächlich bewiesen.

B) In diesem Falle wird wegen

$$U^{(\nu)}(s) = d_0 \frac{H^{(\nu)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{\nu+2}} + d_1 \frac{H^{(\nu-1)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{\nu+3}} + \ldots + d_\nu \frac{H(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{2\nu+2}}$$

auf der imaginären Achse $U^{(\nu)}(s) = o(1)$ mit $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ und $U^{(n)}(s)$ für hinreichend grosse t bei $\tau = +\infty$ vom Fourierschen Charakter; subtrahiert man ferner von $U(s)$ den Ausdruck

$$V(s) = \frac{1}{s}\left(b_0 + \sum_{\nu=0}^{n} b_{2\nu+1} s^{\frac{2\nu+1}{2}}\right)$$

so ist in

$$U(s) = V(s) + W(s)$$

$W^{(n)}(s)$ auf der imaginären Achse stetig. Alles in Allem ergibt dann die Anwendung des erwähnten Satzes von Herrn Haar offenbar (18) w. z. b. w.

Im Falle (7*) mit $abc \neq 0$ ist nun die symbolische Lösung von der Gestalt *A)*, im Falle (5*) mit $bc \neq 0$ dagegen von der Gestalt *B)*. Alle sonst angeführten Bedingungen sind teils nach § 3 teils offenbar[15]) erfüllt. Damit können auf diese Fälle die Heavisideschen Regeln *A)* bezw. *B)* mit voller Recht angewandt werden.

---

15) Allein die Bedingungen *B) e*, *f)* erfordern im Falle (5*) eine längere Betrachtung. Differenziert man durchwegs nach $\sqrt{s}$, so wird

$$(\sqrt{as+b})^{(\nu)} = \sqrt{s^\nu}\,\sqrt{(as+b)^{1-2\nu}} + \sqrt{s^{\nu-2}}\,\sqrt{(as+b)^{1-2(\nu-1)}} + \ldots = O(\sqrt{s^{1-\nu}})$$

und so nach der Leibnizschen Regel

$$r_\nu = r^{(\nu)} = c_1 \sqrt{s}\,(\sqrt{as+b})^{(\nu)} + c_2 (\sqrt{as+b})^{(\nu-1)} = O(\sqrt{s^{2-\nu}}).$$

Zum Schluss wird

$$H^{(\nu)}(\sqrt{s}) = H(\sqrt{s}) \sum c_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \ldots r_\nu^{i_\nu}$$

mit

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + \nu i_\nu = \nu,$$

d. h.

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_\nu \begin{cases} \leq \nu - 1, & i_1 \neq \nu \\ = \nu, & i_1 = \nu. \end{cases}$$

Es ist also

$$H^{(\nu)}(\sqrt{s}) = c_3 H(\sqrt{s})\, r_1^\nu + O(\sqrt{s^{\nu-2}}),$$

und hierin das zweite Glied nach Division durch $\sqrt{s^{\nu+2}}$ von der Grössenordnung s^{-2}, also vom Fourierschen Charakter. Wegen

$$\frac{r_1^\nu}{\sqrt{s^{\nu+2}}} = c_4 \frac{1}{s}\left(\frac{s}{as+b}\right)^{\frac{\nu}{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{s^3}}\right)$$

ist auch das erste Glied in $H^{(\nu)}(\sqrt{s})$ nach Division durch $\sqrt{s^{\nu+2}}$ vom Fourierschen Charakter. Im Falle (5*) ist also *B) f)* erfüllt. Nebenbei ergibt sich $H^{(\nu)}(\sqrt{s}) = O(\sqrt{s^\nu})$, so dass auch die Bedingung *e)* erfüllt ist.

§ 5.

Einige Verallgemeinerungen des H-Kalküls.

Wie die symbolische Lösung (4*) der gewöhnlichen Differentialgleichung (1) zeigt, kommen bei ihr die Regeln $A)$, $B)$ zunächst überhaupt nicht in Betracht. Bei konstanter rechten Seite b ist nämlich (4*) eine meromorphe Funktion von s und bei einer anderen Funktion $b(t)$ scheint der Operationskalkül nicht einmal ansetzbar zu sein, — solange man die *symbolische Gestalt* von $b(t)$ nicht kennt. Der HEAVISIDEsche Ansatz an Gleichung (6) scheint aber uns in dieser Hinsicht ein recht charakteristisches Beispiel zu geben. Der Vergleich der rechten Seite von (6*) mit der Ableitung von (5**) nach x zeigt nämlich, dass die symbolische Gestalt der rechten Seite von (6) ihre mit s multiplizierte L-Transformierte ist. So wird man zu folgendem Satze geführt:

Es sei in der Gleichung (1) $b(t)$ eine stetige Funktion des verengten Oberbereichs. Handelt es sich um die asymptotische Entwicklung der Lösung mit den Anfangswerten $u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(n-1)}(0)=0$, so ersetze man in (1) das Zeichen $\frac{d^k}{dt^k}$ durch s^k, die Funktion $b(t)$ aber durch ihre mit s multiplizierte L-Transformierte $B(s)=L(b(t))$. Ergibt sich aus dieser in u linearen algebraischen Gleichung

$$u=s\frac{B(s)}{C(s)}=\begin{cases} H(s)\sqrt{s} \\ H(\sqrt{s}) \end{cases} \tag{19}$$

mit den in § 4. angegebenen Eigenschaften der Funktion $H(s)$, so sind die Regeln $A)$ bzw. $B)$ anwendbar.

Es erübrigt sich nach § 4 nur der Beweis, dass (19) die mit s multiplizierte L-Transformierte der stetigen Lösung darstellt. Wir benützen diese Gelegenheit um eine neue Methode zur Integration der Gleichung (1) anzugeben.

Es sei also die Gleichung (1) vorgelegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_n=1$ und $a_0 \neq 0$ gewählt werden. Gesetzt, es gibt — unter der Annahme, dass $b(t)$ dem verengten Oberbereich angehört — eine Lösung deren n-te Ableitung eine Oberfunktion und $n-1$-te Ableitung bei $t=0$ stetig ist. Führt man dann (1) in ihre L-Transformierte über indem man beiderseits mit e^{-st} multipliziert und dann von 0 bis ∞ nach t integriert, so ergibt sich mit Rücksicht auf (2) und (12)

$$(20)\quad C(s)\,L(u)-u(0)\,\{a_n s^{n-1}+\ldots+a_1\}$$
$$-u'(0)\,\{a_n s^{n-2}+\ldots+a_2\}-\ldots-u^{(n-1)}(0)=L(b).$$

Beachtet man, dass

$$a_n s^{n-\nu}+a_{n-1}s^{n-\nu-1}+\ldots+a_\nu=\frac{C(s)}{s^\nu}-\left(\frac{a_0}{s^\nu}+\frac{a_1}{s^{\nu-1}}+\ldots+\frac{a_{\nu-1}}{s}\right)$$

ist, so ergibt eine leichte Rechnung:

$$(1^{**})\qquad L(u)=\left[L(b)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{s^{\nu+1}}\right]\frac{1}{C(s)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{u^{(\nu)}(0)}{s^{\nu+1}}$$

mit

$$c_\nu=a_0u^{(\nu)}(0)+a_1u^{(\nu+1)}(0)+\ldots+a_{n-\nu-1}u^{(n-1)}(0).$$

Geht man nun in (1^{**}) beiderseits auf die Oberfunktionen zurück und bezeichnet die zu $\frac{1}{C(s)}$ gehörende stetige Oberfunktion mit $c(t)$, so ergibt sich schliesslich

$$(21)\qquad \begin{aligned} u(t)&=\left[b(t)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{\nu!}t^\nu\right]*c(t)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{u^{(\nu)}(0)}{\nu!}t^\nu\\ &=v(t)*c(t)+w(t)\end{aligned}$$

bis auf eine Nullfunktion, die aber, da wir uns auf differenzierbare Funktionen beschränken, identisch gleich Null ist.

Nun beweist man sofort, dass (21) eine Lösung des Anfangswertproblems ist u. zw. bereits unter der einzigen Bedingung, dass $b(t)$ stetig ist. Wegen

$$w^{(\nu)}(0)=u^{(\nu)}(0)\ \text{ für }\ \nu=0,1,2,\ldots,n-1$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu w^{(\nu)}(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{\nu!}t^\nu$$

genügt hiezu nämlich nur den Spezialfall zu beweisen, dass bei stetigem $v(t)$

$$z(t)=v(t)*c(t)=v(t)*e^{s_1t}*\ldots*e^{s_nt}$$

der Differentialgleichung $D[z]=v(t)$ mit den Anfangswerten $z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0$ genügt. $s_1,\ldots,s_n$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2).

Was die Anfangswerte anbelangt, ist dies nach (14) offenbar der Fall. Die Anwendung von (13) ergibt ferner

$$D[z]=v(t)*\sum a_\nu c^{(\nu)}(t)+v(t),$$

so dass zum Schluss nur der Beweis von

$$(22)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}a_\nu c^{(\nu)}(t)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\,(e^{s_1t}*\ldots*e^{s_nt})^{(\nu)}\equiv 0$$

übrig bleibt.

Die Funktionen $c^{(\nu)}(t)$ gehören aber offenbar dem Oberbereich an, ferner wird nach (14) $c^{(\nu)}(0)=0$ für $\nu=0,1,\ldots n-2$, und $c^{(n-1)}(0)=1$; es ist also nach (12)

$$L(c^{(\nu)})=s^{\nu}\,L(c) \text{ für } \nu=0,1,\ldots n-1$$
$$L(c^{(n)})=s^{n}\,L(c)-1,$$

und so
$$L\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, c^{(\nu)}(t)\right)=\sum_{\nu=0}^{n} a_n\, s^{\nu}\, L(c(t))-1$$
$$=\frac{C(s)}{C(s)}-1\equiv 0;$$

es ist somit die Oberfunktion (22) eine Nullfunktion, die aber wegen der Stetigkeit identisch verschwindet.

Setzt man nun in (1**) die Anfangswerte $u(0),\ldots,u^{(n-1)}(0)$ — und somit die Konstanten c_ν — alle gleich Null, so zeigt der Vergleich von (1**) mit (19) die Richtigkeit unserer Behauptung.

Aus (20) ersieht man übrigens auch, dass, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2) in der Halbebene $R(s)<0$ liegen, die asymptotischen Regeln bei beliebigen Anfangswerten bestehen bleiben. Die ausschlaggebende singuläre Stelle von $L(u)$ bleibt dann noch immer jene von $\frac{B(s)}{C(s)}$ bei $s=0$.

In gleicher Weise wird man sich bei partiellen Differentialgleichungen von der dem symbolischen Kalkül eigentümlichen Bedingung bezüglich konstanter Randbedingungen befreien können. Man führe nur zu diesem Zwecke die symbolische Gestalt (d. i. die mit s multiplizierte L-Transformierte) dieser Randwerten an Stelle der früheren Konstanten ein.

Zum Schluss bemerken wir noch, — und diese bedeutende Erweiterung folgt nun aus den erwähnten Sätzen von Herrn Haar unmittelbar — dass die Heavisideschen Regeln *A), B)* selbst dann gültig bleiben, falls die Entwicklungen *A), B)* die symbolische Lösung bis auf eine mit s multiplizierte, in der Halbebene $R(s)\geqq 0$ reguläre und dort bei wachsender Ordinate samt ihren Ableitungen hinreichend stark gegen Null strebende Funktionen darstellen.

(Eingegangen am 2. Dezember 1926.)

Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche.

(Punktmengen. — Kartenfärben. — Verwandtschaftsbeziehungen. — Schachspiel.)

Von Dénes König in Budapest.

§ 1.

Beim Analysieren eines Beweises, den Stephan Valkó und ich für einen Satz der allgemeinen Mengenlehre gegeben haben,[1]) wurde ich auf folgendes Lemma geführt,[2]) welches sich als eigentlicher Kern des erwähnten Beweises erwies.

A) *Es sei* $E_1, E_2, E_3 \ldots$ *eine abzählbarunendliche Folge endlicher, nicht leerer Mengen und* R *eine binäre Relation, die so beschaffen ist, dass zu jedem Element* x_{n+1} *von* E_{n+1} *mindestens ein solches Element* x_n *von* E_n *gehört, welches zu* x_{n+1} *in der Relation* R *steht, was wir durch* $x_n R x_{n+1}$ *ausdrücken wollen. Dann kann man in jeder der Mengen* E_n *je ein Element* a_n *derart bestimmen, dass für die unendliche Folge* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *stets* $a_n R a_{n+1}$ *bestehe* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Fasst man die Elemente der Mengen E_n als Punkte auf und deutet man das Bestehen der Relation xRy dadurch an, dass man die Punkte x und y durch eine Kante verbindet, so kann man dieses Lemma in graphentheoretischer Formulierung[3]) folgendermassen aussprechen.

Zerfällt die abzählbarunendliche Menge der Punkte (= Knotenpunkte) eines unendlichen Graphen G in abzählbar viele endliche

---

[1]) „Über mehrdeutige Abbildungen", Mathematische Annalen, Bd. 95.

[2]) „Sur les correspondances multivoques", Fundamenta Mathematicae, Bd. 8, § 3.

[3]) Den Begriff des unendlichen Graphen habe ich in § 3 meiner Arbeit „Über Graphen ..", Mathematische Annalen, Bd. 77. eingeführt.

nicht leere Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ derart, dass jeder Punkt von E_{n+1} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit einem Punkte von E_n durch eine Kante verbunden ist, so gibt es im Graphen einen „unendlichen Weg" $a_1 a_2 a_3 \ldots$, der aus jeder der Mengen E_n einen Punkt a_n enthält. (Auch hier brauchen die Mengen E_n nicht unbedingt elementfremd zu sein.)

In dieser graphentheoretischer Terminologie gestaltet sich der Beweis folgendermassen. Ein endlicher Weg in G soll als ein S-Weg bezeichnet werden, wenn seine Punkte der Reihe nach zu E_1, zu $E_2, \ldots,$ zu E_k gehören. Es gibt unendlichviele S-Wege in G, da, mit Ausnahme der Punkte von E_1, jeder Punkt von G der Endpunkt eines S-Weges ist. Jeder S-Weg beginnt mit einer Kante die einen Punkt x_1 von E_1 mit einem Punkt x_2 von E_2 verbindet. Da solche Kanten nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, so muss *eine* dieser Kanten, etwa $a_1 a_2$, in unendlich vielen S-Wegen vorkommen. Alle *diese* S-Wege enthalten nun als zweite Kante eine der endlichvielen Kanten $a_2 x_3$, wo x_3 zu E_3 gehört; also muss es in E_3 einen Punkt a_3 von der Beschaffenheit geben, dass unendlichviele S-Wege, die mit $a_1 a_2$ beginnen, auch $a_2 a_3$ enthalten. Ebenso fortfahrend definiert man nun einen Punkt a_4 von E_4, a_5 von E_5, u. s. w. Das Verfahren kann nicht abbrechen und führt zu einem unendlichen Weg $a_1 a_2 a_3 \ldots$ von der verlangten Eigenschaft.

Was die Anwendungen des hiermit bewiesenen Lemmas innerhalb der Graphentheorie betrifft, ist dort eine andere, teilweise allgemeinere Formulierung von Nutzen. Durch fast wörtliche Wiederholung des gegebenen Beweises ergibt sich nämlich folgender Satz.

Laufen in jedem Punkte eines unendlichen zusammenhängenden Graphen nur endlichviele Kanten zusammen, so enthält der Graph einen unendlichen Weg.

Beide Bedingungen sind hier notwendig. Wenn die Punkte nicht „von endlicher Ordnung" sind, braucht der Graph keinen unendlichen Weg zu besitzen, wie dies ein unendlichviel-strahliger Stern zeigt. Dass der Graph auch zusammenhängend sein muss, zeigt das Beispiel des (regulären) Graphen, welcher aus einem Zweieck, einem Dreieck, einem Viereck, u. s. w. besteht, wobei diese Vielecke untereinander nicht zusammenhängen. Letzteres Beispiel zeigt auch, dass ein Graph einen „beliebig langen" Weg enthalten kann, ohne einen unendlichen Weg enthalten zu müssen.

Folgende Zeilen haben nun den Zweck die unter [2]) erwähnte Anwendung mit anderen Anwendungen des Lemmas A) zu ergänzen. Es kommt dabei nicht immer auf die Neuheit der Resultate, sondern vielmehr darauf an, zu zeigen, dass in diesem Lemma ein fruchtbares Prinzip ausgesprochen wird, welches auf ganz verschiedenartige mathematische Probleme mit Nutzen angewendet werden kann.

§ 2

Wir beweisen zunächst folgende Verallgemeinerung des Borelschen Theorems.[4])

Es sei E eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalles (0, 1) *und I eine Menge von Intervallen, die so beschaffen sind, dass jeder Punkt von E in einem dieser Intervalle enthalten ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl n so, dass wenn man* (0, 1) *in* 2^n *gleiche Intervalle teilt, diejenigen dieser Teilintervalle, welche einen Punkt von E enthalten, in einem Intervalle der Intervallmenge I enthalten sind.*

Wäre der Satz nicht richtig, so gäbe es für jedes n wenigstens ein Intervall $\left(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$, wo $m = 0, 1, 2, \ldots$ oder $2^n - 1$ ist, welches einen Punkt von E enthält und in keinem Intervalle aus I enthalten ist. Wir bezeichnen die Menge *dieser* Intervalle mit E_n Für jedes n ist E_n endlich und nicht leer. Ist x_n ein Element von E_n und x_{n+1} von E_{n+1}, so setzen wir $x_n R x_{n+1}$, falls x_{n+1} aus x_n durch Halbieren hervorgegangen ist. Vermöge der gegebenen Definitionen der Mengen E_n und der Relation R erfüllen diese die Bedingungen des Lemmas A). Wendet man das Lemma an, so kommt man zum folgenden Resultat. Es existiert eine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Intervallen, die alle 1) aus dem vorangehenden durch Halbieren entstehn, 2) einen Punkt von E enthalten und 3) in keinem Intervall aus I enthalten sind. Dann ist aber auch der gemeinsame Punkt α der Intervalle $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in keinem Intervalle aus I enthalten. Dies ist aber unmöglich, da, wegen der Abgeschlossenheit von E, α zu E gehört.

Wir wollen noch erwähnen dass dieser Beweis nur vom Satze der ineinandergeschachtelten Intervalle, nicht aber vom Bolzano-Weierstrassschen Satze Gebrauch machte. Derselbe Beweis gilt für die Ebene, Raum, u. s. w.

---

[4]) Vgl. De la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, etc., S. 14.

§ 3.

Die zweite Anwendung betrifft das Problem des Kartenfärbens. Es ist bewiesen, dass zu jeder (zweiseitigen) Fläche eine minimale Zahl p (die nur vom Geschlecht der Fläche abhängt) von folgender Eigenschaft gehört: wird die Fläche durch einen beliebigen Graph in *endlich* viele Länder zerteilt, so kann man jedem Lande eine aus p verschiedenen Farben ausgewählte Farbe so zuordnen, dass zwei Länder, die eine gemeinsame Grenzkante besitzen, stets verschieden gefärbt werden. (Für die Ebene und Kugel weiss man nur, dass entweder $p = 4$ oder $p = 5$ ist, für die Torusfläche ist $p = 7$.) Wie steht aber die Sache, wenn dieselbe Fläche durch einen (unendlichen) Graph in (abzählbar) unendlichviele Länder zerlegt wird? Wir beweisen, dass auch *in diesem Falle stets p Farben genügen.*[5])

Es seien $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n, \ldots$ die Länder der „unendlichen" Karte. Die Grenzkanten von $L_1, L_2, \ldots$ und L_n bilden einen Graph G_n, der die Fläche in $n+1$ Länder $L_1, L_2, \ldots, L_n, M_n$ zerschneidet, wo M_n die Länder $L_{n+1}, L_{n+2}, \ldots$ ausmacht. Die durch G_n bestimmte Karte K_n kann, da sie endlich ist, mit p Farben gefärbt werden (die Farbe von M_n wollen wir dabei ausser Acht lassen) und zwar natürlich nur auf endlichviel verschiedene Arten. Die verschiedenen Färbungen $F_n, F'_n, F''_n, \ldots$ von K_n (mit den p Farben) bilden also eine endliche, nicht leere Menge E_n. Aus jeder Färbung F_{n+1} von K_{n+1} ergibt sich sofort eine Färbung F_n von K_n, bei der nämlich jedes der Länder $L_1, L_2, \ldots, L_n$ dieselbe Farbe erhält, wie bei der Färbung F_{n+1} (da, wie gesagt, wir uns um die Farbe von M_n nicht kümmern). In diesem Falle setzen wir $F_n R F_{n+1}$. Vermöge der hier gegebenen Definitionen der Mengen E_n und der Relation R, erfüllen diese die Bedingungen des Lemmas A). Wendet man das Lemma an, so ergibt sich eine unendliche Folge $F_1, F_2, F_3, \ldots$ von Färbungen der Karten K_1, bzw. K_2, bzw. $K_3, \ldots$, die so beschaffen sind, dass jedes Land L_i bei allen diesen Färbungen F_k dieselbe Farbe erhält. D. h.: diese Folge ordnet jedem der Länder $L_1, L_2, L_3, \ldots$ eine bestimmte der p Farben zu. Die so erhaltene Färbung der unendlichen Karte entspricht unseren Forderungen, da ein Verstoss dagegen sich schon bei einer der endlichen Karten K_n zeigen müsste.

---

5) Wie ich nachträglich erfahre, ist der englische Mathematiker L. H. Thomas vor kurzem zum selben Resultate gelangt.

§ 4.

Setzt man voraus, dass die Menschheit niemals aussterben wird, so kann man mit Hilfe unseres Lemmas A) beweisen, dass wenigstens ein heute lebender Mensch existiert, der der Ahne einer *unendlichen Folge* von Nachkommen ist.

Es sei nämlich E_1 die Menge der heute lebenden Menschen; E_2 die Menge der Kinder der Elemente von E_1; E_3 die Menge der Kinder der Elemente von E_2; u. s. w. Laut der obigen Hypothese ist — wegen der Endlichkeit des Menschenlebens — keine der Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ leer. Da ein Mensch nur endlichviele Kinder haben kann, so folgt aus der Endlichkeit von E_1, dass sämtliche Mengen E_i endlich sind. Die Relation R definieren wir so, dass die Beziehung „xRy" das Folgende bedeuten soll: „y ist ein Kind von x." Vermöge der hier gegebenen Definitionen der Mengen E_i und der Relation R sind also die Bedingungen des Lemmas A) erfüllt. Wendet man das Lemma an, so ergibt sich eine *unendliche* Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass a_i ein Element von E_i und a_{i+1} ein Kind von a_i ist. Demnach ist a_1 ein heute lebender Mensch mit der verlangten Eigenschaft.

Durch eine ähnliche Überlegung kann man auch zeigen, dass aus der unendlichen Lebensdauer des menschlichen Geschlechtes auch die Existenz eines unendlichen *Manns*stammes gefolgert werden kann.

§ 5.

Die vierte Anwendung, die ich hier mitteilen will, verdanke ich Johann von Neumann und bezieht sich auf eine Art von Spielen zu denen auch das Schachspiel gehört. Aus der „Theorie" der „Endspiele" und der „Schachprobleme" ist es dem praktischen Schachspieler bekannt, dass solche Positionen (sog. Gewinnstellungen) q existiren, in denen der eine Spieler (Weiss), der am Zuge ist, den Sieg erzwingen kann, wie auch sein Gegner (Schwarz) spielen mag. Ist q eine solche Gewinnstellung, so werden wir beweisen, dass es *eine von q abhängende Zahl N von der Beschaffenheit existiert, dass Weiss von dieser Position q aus spielend den Sieg in weniger als N Zügen erzwingen kann.*

Wir müssen zuerst genau definieren, was es bedeutet, dass Weiss in einer Position „den Sieg erzwingen kann", „auf Gewinn steht". Die Notwendigkeit und Möglichkeit einer genauen mathematischen Definition, welche jedes subjektive und psychologische Moment ausschaltet, hat Zermelo in seinem geistreichen Cambridger Vortrag[6]) erkannt. Da jedoch Zermelo nur die Bedeutung der Aussage: „der Sieg lässt sich *in höchstens r Zügen* erzwingen" festlegt, so soll die Definition, die wir zu Grunde legen wollen, hier ausführlich ausgesprochen werden.

Es sei q irgendeine Position, die durch einen Zug von Schwarz in irgendeiner regelrechten Partie entstehn kann (oder auch die Anfangsposition). Im Folgenden betrachten wir stets nur jenen Teil der Partien, welcher mit der Position q beginnt. — Eine endliche Folge $w_1, s_1, w_2, s_2, \ldots, w_n$ von Zügen, die den Schachregeln entsprechend von der Stellung q ausgehend abwechselnd von Weiss und Schwarz ausgeführt werden, heisse ein *Spielanfang*. Endigt er mit einer Mattposition (für Schwarz), so haben wir es mit einem beendeten Spiel zu tun. (Das „Patt" soll hier der Einfachheit halber ausser Acht gelassen werden.) Die Gesamtheit dieser Spielanfänge ist eine bestimmte von q abhängende Menge Q. Dass Weiss in der Position q auf Gewinn steht, bedeutet nun Folgendes. Es gibt eine Teilmenge R von Q mit folgenden drei Eigenschaften:

1) es gibt in R ein Element, welches aus einem einzigen Zug (von Weiss) besteht ($n = 1$);

2) ist $(w_1, s_1, w_2, s_2, \ldots, w_n)$ ein Element von R, durch welches die Position q' entsteht und ist s_n irgendein regelrechter Zug von Schwarz von dieser Position q' aus, so gibt es einen Zug w_{n+1} von Weiss derart, dass auch der Spielanfang $(w_1, s_1, \ldots, w_n, s_n, w_{n+1})$ ein Element von R ist[7]);

3) wenn ein (durch Matt) beendetes oder unendliches („remis") Spiel so beschaffen ist, dass die aus seinen (von der Position q aus gezählten) ersten $2n-1$ Zügen bestehenden Spielanfänge sämtlich (d. h. für $n = 1, 2, 3, \ldots$) zu R gehören, so endet das Spiel mit dem Siege von Weiss (kann also garnicht unendlich sein).

Durch die Angabe einer solchen Teilmenge R ist für Weiss in der Position q eine Weisung zum Spielen gegeben, nämlich die

[6]) „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels." Proceedings of the fifth int. Congress of Mathematicians (Cambridge, 1912), Bd. II., S. 501.

[7]) hierin ist auch ausgesprochen, dass durch den Zug s_n Weiss nicht Matt gesetzt wurde; eine Mattposition von Weiss ist eben eine Position, von der aus überhaupt kein regelrechter Zug von Weiss existiert.

folgende: er soll so spielen, dass die Folge der ersten $2n-1$ Züge, die auf q folgen, für jedes n ein Element von R sei. Wegen 1) und 2) *kann* Weiss dieser Weisung stets folgen und 3) garantiert es, dass er siegen *wird*, wenn er dieser Weisung folgt.

[Folgende Bemerkung ist vielleicht nicht überflüssig. Wie Weiss in einer durch einen Zug von Schwarz entstandenen Position zu spielen hat, wenn er einer Menge R entsprechenden Weisung folgen will, hängt im Allgemeinen nicht nur von dieser Position, sondern vom ganzen vorangegangenen Spiele ab. Dass, falls eine Weisung im oberen Sinne existiert, stets auch eine solche existiert, bei der der auszuführende Zug von Weiss nur von der momentanen Position abhängt, ist *nicht* trivial; lässt sich jedoch graphentheoretisch beweisen, worauf wir aber hier nicht einzugehen brauchen].

Es sei q eine Gewinnstellung, zu der also eine Menge R mit den erwähnten drei Eigenschaften gehört. Wir wollen ein mit q beginnendes Spiel, welches der Bedingung in 3) entspricht, als „richtiges Spiel" bezeichnen. Laut 3) ist ein richtiges Spiel endlich und endet mit dem Siege von Weiss. Da Weiss durch ausschliesslich richtige Spiele den Sieg (von q aus) erzwingen kann, wird unser Ziel erreicht, wenn wir nun beweisen, dass die Anzahl der Züge in irgendeinem richtigen Spiele unter einer bestimmten (endlichen) Schranke bleibt.

Es sei E_n die Menge sämtlicher aus $2n-1$ Zügen bestehenden Elemente von R ($n=1,2,3,\ldots$). Da bei irgendeiner Position nach den Schachregeln nur endlichviele Züge möglich sind, sind die Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sämtlich endliche Mengen. Wenn in einem richtigen Spiele der bis inclusive den n-ten Zug von Weiss reichender Spielanfang (von q aus gerechnet) mit a_n, der bis zum $n+1$-ten reichender mit a_{n+1} bezeichnet wird, so wollen wir $a_n R a_{n+1}$ setzen. Nehmen wir nun an, unsere Behauptung wäre falsch. Dies besagt, dass beliebig lange richtige Spiele existieren, dass also keine der Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ leer ist. Vermöge der hier gegebenen Definitionen der Mengen E_n und der Relation R, erfüllen diese die Bedingungen unseres Lemmas A). Wendet man das Lemma an, so ergibt sich eine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von Spielanfängen (wo a_n aus $2n-1$ Zügen besteht), welche die aufeinander folgenden Spielanfänge eines richtigen Spieles geben. Dies ist aber unmöglich, da ein richtiges Spiel endlich ist.

Der hiermit beendete Beweis stützt sich wesentlich auf die Tatsache:

α) die Menge der Positionen, die nach dem n-ten Zug in irgendeinem Spiel entstehen können, ist endlich für jedes n.

Für das Schachspiel gilt sogar, da sowohl die Menge der Felder, wie die der Steine endlich ist:

β) die Menge aller möglichen Positionen ist endlich.

Der gegebene Beweis hat von dieser letzteren Tatsache keinen Gebrauch gemacht und so gilt er auch für Spiele, für die nur *α)* zutrifft, jedoch *β)* nicht.[8])

Die Behauptung: „ist in einer Position der Gewinn überhaupt zu erzwingen, so ist er auch in höchstens t Zügen, wo $t+1$ die (endliche) Anzahl der möglichen Positionen ist", wurde schon von Zermelo in seinem erwähnten Vortrag aufgestellt. Dieser Satz lässt sich jedoch kaum anders beweisen, als dass man früher überhaupt die Beschränktheit der Zugzahlen — d. h. die oben bewiesene Neumannsche Behauptung, mit der sich Zermelo nicht befasst — beweist. Denn die Überlegung von Zermelo in den Zeilen 1—4, S. 503, a. a. O. ist nicht zwingend Es genügt ja nicht die Zugzahl eines einzigen Spieles unter $t+1$ herabzudrücken, sondern dies muss zugleich für sämtliche Spiele erreicht werden können und zwar so, dass nach dieser Reduktion die für R oben geforderten Eigenschaften 1), 2), 3) erhalten bleiben; und dies ernötigt — insbesondere für 2) — eine Überlegung, die keineswegs selbstverständlich ist. Auch kann man — wie noch beiläufig bemerkt werden soll — Weiss nicht die Weisung geben, dass falls dieselbe Position zweimal auftritt, er „beim ersten Erscheinen derselben ebenso weiterspielen soll, wie beim zweiten Male." Diese Forderung ist unerfüllbar, falls im kritischen Moment Schwarz am Zuge ist.

(*Eingegangen am 17. II. 1927*).

Zusatz auf folgender Seite.

---

[8]) Ein solches Spiel würde z. B. entstehn, wenn man die endliche Steinezahl zwar beibehält, jedoch auf einen unendlichen Brett Schach spielen würde und etwa nur Züge von solcher „Länge" zulässt, die auf der gewöhnlichen Tafel von 64 Feldern möglich sind. Der gegebene Beweis gilt auch für dieses „unendliche" Schachspiel.

Zusatz zu § 5.

Nachdem ich die vorangehenden Untersuchungen Herrn Zermelo zukommen liess, hatte er die Freundlichkeit, den folgenden Beweis seines oben erwähnten Satzes über die Schranke t mir mitzuteilen.

Da die Gesamtheit aller Positionen endlich ist, so ist die Gesamtheit derjenigen Positionen, in denen Weiss am Zuge ist und von denen aus Weiss den Sieg in höchstens r Zügen, aber nicht in weniger Zügen, erzwingen kann, ebenfalls endlich. Diese endliche Anzahl sei m_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$. Aus demselben Grund muss die Summe $\Sigma m_r = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$, als die Anzahl verschiedener Positionen, endlich sein, d. h. mit einem Glied m_λ abbrechen; so dass $m_\lambda \geqq 1$, aber für $r > \lambda$ stets $m_r = 0$ wird (es ist klar, dass nicht sämtliche m_r verschwinden können). Es sei p eine Position, von der aus Weiss, mit dem Zuge w_1 beginnend, den Sieg in höchstens r Zügen, nicht aber in weniger Zügen erzwingen kann. Aus jedem der durch einen auf w_1 folgenden Zug von Schwarz entstehenden endlichvielen Positionen kann dann Weiss den Sieg in höchstens $r - 1$ Zügen erzwingen. Unter diesen endlichvielen Positionen gibt es auch sicher eine, von der aus Weiss in weniger als $r - 1$ Zügen den Sieg *nicht* erzwingen kann, da sonst Weiss von p aus in weniger als r Zügen den Sieg erzwingen könnte. Mit m_r ist also auch m_{r-1} von Null verschieden. Da also $m_\lambda \geqq 1$ ist, ist auch $m_{\lambda-1} \geqq 1$, also auch $m_{\lambda-2} \geqq 1$, u. s. w. bis $m_1 \geqq 1$. Hieraus folgt, dass die Anzahl sämtlicher Positionen mit Weiss am Zuge, von denen aus Weiss den Gewinn in einer begrenzten Anzahl von Zügen erzwingen kann

$$m = \Sigma m_r = m_1 + m_2 + \ldots + m_\lambda$$

grösser oder gleich λ ist. Andererseits ist natürlich m kleiner als die Anzahl t sämtlicher Positionen mit Weiss am Zuge. Also ist $\lambda < t$. Lässt sich also der Gewinn von einer Position aus in einer begrenzten Anzahl von Zügen erzwingen, so lässt er sich auch in weniger als t Zügen. Da aber — wie wir oben gezeigt haben — aus jeder Gewinnstellung der Sieg in einer begrenzten Anzahl von Zügen erreicht werden kann, so is in der Tat t eine universelle obere Schranke für die nötigen Zugzahlen bei irgendeiner Gewinnstellung.

Durch diesem Beweis[9]) hat Zermelo die oben erwähnte Lücke

[9]) Laut früheren mündlichen Mitteilungen des Herrn J. von Neumann war ihm ein auf derselben Grundidee beruhender Beweis bekannt.

in seiner Cambridger Darstellung vollkommen und zwar in elegantester Weise ausgefüllt.

Einer oben ausgesprochenen Vermutung entsprechend benutzt dieser Beweis den NEUMANNschen Satz über die Beschränktheit der Zugzahlen, den wir oben auf das Lemma A) zurückgeführt haben. Auch für diesen Beschränktheitssatz hat mir Herr ZERMELO einen Beweis mitgeteilt, der vom Lemma A) explizite keinen Gebrauch macht. Dieser ausserordentlich einfach formulierter Beweis soll — ebenfalls mit der Erlaubniss des Herrn ZERMELO — hier *wörtlich* mitgeteilt werden.[10])

„Es sei p_0 eine Position, in welcher Weiss am Zuge in *keiner begrenzten* Anzahl von Zügen das Mat erzwingen kann, sondern, je nach dem Spiel des Gegners, vielleicht in unbegrenzt wachsender Anzahl. Dann wird auf *jedem* Zug von Weiss der Schwarze eine Position p_1 herbeiführen können, welche von der *gleichen* Beschaffenheit ist. Denn sonst würde, da die Zahl der möglichen Züge endlich ist, Weiss auch von p_0 aus mit begrenzter Zugzahl zum Ziele kommen. Somit wird, wie Weiss auch spielt, bei richtigem Gegenspiel eine unbegrenzte Folge $p_0, p_1, p_2, \ldots$ von Positionen (mit Weiss am Zuge) entstehen, welche *sämtlich* die Beschaffenheit p_0 haben, also niemals zum Mat führen können. Ist also in einer Position p_0 der Sieg *überhaupt* zu erzwingen, so auch in einer begrenzten Zugzahl."

Zu diesem Beweis will ich nur folgende Bemerkung hinzufügen. Wenn man diesen Beweis ganz ausführlich darstellt und bis auf die oben gegebene Definition der „Gewinnstellung" zurückführt, ersieht man, dass er mit dem oben (§ 5) gegebenen übereinstimmt, nur dass er auch den oben (§ 1) gegebenen Beweis des Lemmas A) mitenthält. — Wenn auch die Formulierung des Beweises hierdurch länger wird, scheint mir ein Beweis, der den Beweis des Lemmas A) von den übrigen Überlegungen lostrennt, klarer den logischen Inhalt hervortreten zu lassen. Und zwar gilt dies nicht nur für die Anwendung auf die Theorie der Spiele, sondern auf jede Überlegung (wie die in § 2, 3 oder 4), welche im Wesentlichen auf dem Lemma A) basiert. Die Sache steht hier ähnlich, wie bei vielen Beweisen der Analysis und der Geometrie, wo durch die Isolierung des implizite angewandten BORELschen Überdeckungssatzes die Überlegungen durchsichtiger werden.

---

10) Herr ZERMELO beabsichtigt seine Untersuchungen über die Schach-Theorie demnächst in zusammenhängender Darstellung erscheinen lassen.

(*Hinzugefügt am 14. III. 1927.*)

Sur l'aire des surfaces courbes.

Par Tibor Radó à Szeged.

L'objet de ce travail est d'exposer d'une manière systématique les éléments de la théorie de l'aire — au sens de Lebesgue — des surfaces courbes. Au § 1, consacré à l'analyse de la définition adoptée pour l'aire, j'ai résumé aussi certains observations de Zoárd de Geöcze et de MM. Lebesgue et Fréchet concernant la conception intuitive de l'aire. Les développements du § 2, consacré à l'étude des relations entre l'aire d'une surface et la mesure de ses projections orthogonales sur des plans, se rattachent à certains résultats fondamentaux dus à Geöcze. Au troisième et dernier paragraphe je passe à l'étude des surfaces données par une équation $z=f(x, y)$; dans ce cas particulier, on obtient pour l'aire des formules explicites, valables sous la seule hypothèse de la continuité de la surface.

Ayant exprimé l'aire par une formule, les problèmes relatifs à l'aire deviennent accessibles aux méthodes générales de la théorie des fonctions de variables réelles. En particulier, les beaux résultats de M. Tonelli, concernant le calcul de l'aire par l'intégrale double classique, s'obtiennent très simplement à l'aide de la théorie des fonctions de rectangle, comme le montre M. S. Saks dans l'article publié à la suite de ce travail, en exposant son remarquable théorème sur la dérivation de l'aire.

Les résultats que j'ai réunis dans le travail présent sont loin d'épuiser les connaissances actuelles sur l'aire au sens de Lebesgue; en me bornant à l'exposition des faits les plus élémentaires, j'ai dû passer sous silence plusieurs résultats importants de M. Lebesgue et de Zoárd de Geöcze. Il faut cependant remarquer que même en réunissant tous les résultats actuellement connus, on serait encore bien loin d'avoir une théorie. Par exemple, le problème du calcul de l'aire des surfaces données sous forme paramétrique n'est pas encore résolu. En outre, on sait fort peu de choses sur les relations de la définition de M. Lebesgue avec les autres définitions de l'aire, qui expriment pourtant autant de propriétés essentielles de ce que l'on pourrait appeler *aire intuitive*.

Je manquerais à un devoir élémentaire si je ne signalais pas mes longues conversations avec M. F. Riesz sur les diverses définitions de l'aire et leur rapport avec la théorie moderne de l'intégration, et avec M. B. de Kerékjártó sur les problèmes et notions d'ordre topologique intervenant au cours des raisonnements.

§ 1. Définition de l'aire.

1. Avant de définir l'aire, il faut se décider sur ce que l'on entendra par surface. Nous nous bornerons à la considération de *surfaces simples*, définies de la manière suivante. Un ensemble de points, situé dans l'espace à trois dimensions, constitue une surface simple s'il peut être considéré comme image biunivoque et continue du carré fermé. Donc, S étant une surface simple, il existe un système de trois fonctions $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ uniformes et continues dans le carré $Q: 0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1$, de sorte qu'en désignant par x, y, z des coordonnées cartésiennes dans l'espace, les équations

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v)$$

établissent une correspondance biunivoque et continue entre les points de Q et de S. Inversement, si l'on donne trois fonctions $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ uniformes et continues dans le carré Q, et telles que les équations $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$ font correspondre à deux points distincts de Q deux points distincts (x,y,z), les points (x,y,z) correspondant aux divers points de Q constituent une surface simple.

Nous dirons qu'une surface simple est *polyédrique* si l'on peut l'obtenir en réunissant un nombre fini de triangles sans points communs intérieurs. Étant donnée une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$, nous désignerons par $A[\mathfrak{P}]$ l'aire de $\mathfrak{P}$ au sens élémentaire, c'est-à-dire la somme des aires des faces triangulaires de $\mathfrak{P}$. Quant aux surfaces simples non-polyédriques, il faut évidemment introduire quelque convention concernant la mesure de l'aire; en effet, l'unité de mesure est un carré, c'est-à-dire une figure plane que l'on ne peut pas comparer directement à une surface courbe générale.

2. Nous adopterons pour l'aire la définition qui fut introduite par M. Lebesgue dans sa Thèse.[1]) Cette définition fait intervenir des suites de surfaces polyédriques tendant vers la surface proposée; il faut donc définir d'abord la notion de convergence dans le champ des surfaces simples. Nous nous servirons à cet effet de la notion importante, due à M. Fréchet, de l'*écart* de deux surfaces. Considérons deux surfaces simples S_1, S_2. Ces surfaces étant des images topologiques du carré, il est possible d'établir, et cela d'une infinité de manières, des transformations topologiques entre S_1 et S_2. Soit T une telle transformation, P_1 un point de S_1, P_2 le point correspondant de S_2. En faisant varier ces points, leur distance atteindra un maximum, que nous appellerons le *module de la transformation* T et que nous désignerons par la notation $\|T\|$. La limite inférieure des modules de toutes les transformations topologiques entre S_1 et S_2 est l'écart de ces surfaces. Nous dirons qu'une suite $\{S_n\}$ de surfaces simples tend vers une surface simple S, si l'écart de S_n et de S tend vers zéro.

Soit maintenant S une surface simple et soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S. En désignant comme plus haut par $A[\mathfrak{P}_n]$ l'aire au sens élémentaire de $\mathfrak{P}_n$, la suite $\{A[\mathfrak{P}_n]\}$ ne tendra en général vers aucune limite. Mais $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$ existe toujours; c'est une quantité finie ou bien infinie positive, qui dépend de S et en outre du choix de la suite $\{\mathfrak{P}_n\}$. Les quantités $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$, correspondant aux diverses suites $\{\mathfrak{P}_n\}$, constituent un ensemble de nombres non-négatifs; la limite inférieure, c'est-à-dire la plus grande borne inférieure, de cet ensemble de nombres est une quantité bien déterminée, finie ou bien infinie positive, ne dépendant plus que de S elle-même. Par définition, cette limite inférieure est l'aire de la surface simple S. Nous désignerons cette quantité, pour rappeler le nom de M. Lebesgue, par $L[S]$.

Nous avons ainsi attaché à toute surface simple S une quantité déterminée $L[S]$,[2]) c'est-à-dire nous avons définie une

[1]) Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica*, serie III, t. VII, 1902, pp. 231—359.

[2]) Ceci suppose le théorème topologique que pour toute surface simple S il existe une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S. Je dois la connaissance de ce théorème à M. B. de Kerékjártó.

fonctionnelle dans le champ des surfaces simples. Pour le moment nous n'avons pas le droit d'affirmer que pour les surfaces simples polyédriques cette fonctionnelle coïncide avec l'aire au sens élémentaire; il est donc nécessaire de conserver la notation $A[\mathfrak{P}]$ pour désigner l'aire au sens élémentaire de la surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$. Nous verrons plus loin que $L[\mathfrak{P}]=A[\mathfrak{P}]$ pour toute surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$; remarquons cependant que du point de vue purement mathématique la définition de la fonctionnelle $L[S]$ serait irréprochable même si ce théorème était en défaut.

3. Rappelons que M. Lebesgue a formulé sa définition pour des surfaces plus générales que les surfaces simples, savoir pour les *surfaces continues.* On conçoit que dans le champ plus vaste des surfaces continues on verra surgir de nouvelles difficultés Il y a lieu d'insister sur le caractére de ces difficultés. Une surface continue S est déterminée par un système d'équations $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$, où φ,ψ,χ désignent des fonctions uniformes et continues dans le carré $Q: 0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq 1$ (pour fixer les idées). On ne suppose plus que ces équations fassent correspondre à deux points, distincts de Q deux points distincts (x,y,z). Une surface continue peut donc avoir des points multiples; s'il s'agit d'une surface polyédrique, les diverses faces triangulaires peuvent s'entrecouper. Soit E_S l'ensemble, dans l'espace xyz, constitué par les points (x,y,z) pour lesquels les équations $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$ ont au moins une solution (u,v) dans le carré Q. Cet ensemble E_S est univoquement déterminé si la surface continue S est donnée, mais il est évident que la surface continue S n'est pas déterminée par l'ensemble E_S. Pour les surfaces continues données par les systèmes d'équations

$$S_1: x=\frac{u}{2},\ y=v,\ z=0;\quad S_2: x=2\left(u-\frac{1}{2}\right)^2,\ y=v,\ z=0,$$
$$(0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq 1),$$

les ensembles E_{S_1}, E_{S_2} coïncident tous deux avec le rectangle $0\leqq x\leqq \frac{1}{2}$, $0\leqq y\leqq 1$, $z=0$, mais l'on ne saurait considérer comme identiques ces surfaces S_1, S_2. D'ailleurs, il est clair que l'on doit attribuer aux aires de S_1, S_2 des valeurs différentes, $1/2$ pour S_1 et 1 pour S_2. On voit donc que pour évaluer l'aire d'une surface continue S il ne suffit pas de connaître l'ensemble E_S de ses points.

Soit S une surface continue donnée par les équations $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$. Soit d'autre part $\{S_n\}$ une suite de surfaces continues, S_n étant donnée par des équations $x=\varphi_n(u,v)$, $y=\psi_n(u,v)$, $z=\chi_n(u,v)$. Dans le cas où $\varphi_n\to\varphi$, $\psi_n\to\psi$, $\chi_n\to\chi$ uniformément dans le carré Q, nous dirons que la suite $\{S_n\}$ tend vers S. Soit en particulier $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces continues polyédriques tendant vers S; en désignant de nouveau par $A[\mathfrak{P}_n]$ l'aire au sens élémentaire de $\mathfrak{P}_n$, $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$ sera une quantité déterminée. La limite inférieure des quantités $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$, correspondant aux diverses suites $\{\mathfrak{P}_n\}$, est considérée par M. LEBESGUE comme l'aire de la surface continue S. Désignons cette quantité, pour la distinguer de la fonctionnelle $L[S]$, définie précédemment dans le champ des surfaces simples, par $L_*[S]$. En remplacant, dans la définition de $L_*[S]$, surface continue par surface simple, surface continue polyédrique par surface simple polyédrique, on retombe sur la fonctionnelle $L[S]$.

Il a été observé plus haut que la connaissance de l'ensemble des points d'une surface continue ne suffit pas pour évaluer son aire. GEÖCZE fit la remarque curieuse qu'en adoptant $L_*[S]$ comme définition de l'aire, il y a des surfaces continues dont l'aire est égale à zéro et qui remplissent un cube[3]). Pour arriver à son exemple, considérons une surface continue S et construisons de la façon suivante une suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de surfaces continues polyédriques tendant vers S. Décomposons le carré Q en n^2 petits carrés congruents, et décomposons, en tracant des diagonales, chacun de ces petits carrés en deux triangles. Soient A, B, C les sommets d'un tel triangle, et soient A^*, B^*, C^* les points correspondants de la surface S. Les triangles $A^*B^*C^*$ ainsi obtenus forment dans l'espace $x\,y\,z$ une surface continue polyédrique $\mathfrak{P}_n$, inscrite dans S; à cause de la continuité des fonctions φ, ψ, χ, figurant dans les équations qui définissent S, on peut évidemment représenter $\mathfrak{P}_n$ par des équations $x=\varphi_n(u,v)$, $y=\psi_n(u,v)$, $z=\chi_n(u,v)$, où $\varphi_n\to\varphi$, $\psi_n\to\psi$, $\chi_n\to\chi$ uniformément dans le carré Q. Donc $\mathfrak{P}_n$ tend vers S. Par conséquent $L_*[S]$ sera égale à zéro si l'aire au sens élémentaire de $\mathfrak{P}_n$ tend vers 0. GEÖCZE observe que c'est certainement le cas si les fonctions

[3]) Z. de GEÖCZE, Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale à zéro et qui remplit un cube, *Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France,* 1913, pp. 29—31; voir aussi H. LEBESGUE, Observations sur la communication précédente, *ibid.* pp. 31—32.

φ, ψ, χ sont indépendantes de $v : \varphi = \varphi(u)$, $\psi = \psi(u)$, $\chi = \chi(u)$, car alors chacun des triangles $A^* B^* C^*$ décrits plus haut a deux de ses sommets réunis en un même point, de sorte que l'aire élémentaire de $\mathfrak{P}_n$ est égale à zéro. Or, on peut choisir les fonctions continues $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ de sorte que la courbe continue $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $z = \chi(u)$ remplisse un cube (*courbe de* Peano); on obtient ainsi l'exemple annoncé.

Cet exemple n'est pas en contradiction avec l'intuition géométrique, puisqu'il n'a guère de sens de parler de la notion intuitive de l'aire d'une surface continue générale. Tout de même, on est conduit à formuler quelques observations concernant la fonctionnelle $L_*[S]$. Soit S la surface de Geöcze décrite plus haut, et soit $\mathbf{p}$ un plan quelconque. La projection orthogonale de S sur $\mathbf{p}$ est un domaine polygonal dont l'aire surpasse $\frac{a^2 \pi}{4}$, où a désigne le côté du cube rempli par S; en effet, ce cube contient une sphère de rayon $\frac{a}{2}$, de sorte que la projection contiendra un cercle de même rayon. L'aire $L_*[S]$ de S étant égale à zéro, on voit donc que dans le champ des surfaces continues il n'est pas vrai en général que l'aire d'une surface est au moins égale à l'aire de l'une quelconque de ses projections orthogonales, tandis que cette propriété constitue l'un des attributs les plus évidents de l'*aire intuitive*. Ceci ressort clairement du fait que la propriété en question est à la base de presque toutes les définitions de l'aire. Pour formuler une seconde observation, rappelons le fait intuitif suivant, relatif à la longueur des courbes. Si un point mobile décrit un intervalle de longueur l, en repassant plusieurs fois par la même position, la longueur du chemin parcouru sera au moins égale à l; en d'autres termes, la longueur d'une courbe continue, contenant tous les points d'un intervalle de longueur l, est au moins égale à l. Il y a donc lieu d'exiger que l'aire d'une surface continue, contenant tous les points d'un carré de côté a, soit au moins égale à a^2; or, cela n'est pas vrai en général si l'on définit l'aire par $L_*[S]$. Pour le voir, il suffit de modifier la construction de Geöcze de manière à obtenir une surface continue S pour laquelle $L_*[S]$ est égale à zéro et qui remplit un carré au lieu d'un cube.

De tout ceci il résulte que la fonctionnelle $L_*[S]$ n'obéit pas dans son champ de définition aux mêmes lois que d'aire intuitive dans le champ des surfaces familières. Il y a donc lieu de restreindre d'abord la généralité des surfaces étudiées ; c'est ce que nous avons fait dès le début en ne définissant l'aire que dans le champ des surfaces simples.[4])

4. Pour éclairer la conception de la fonctionnelle $L[S]$, introduite au n° 2, nous allons indiquer quelques conséquences immédiates de la définition. Soit S une surface simple et $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S. On aura par définition

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S].$$

Montrons qu'il est possible de choisir la suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de sorte que

$$\lim A[\mathfrak{P}_n] = L[S],$$

c'est-à-dire de sorte que $A[\mathfrak{P}_n]$ tende vers la plus petite limite possible. Soit $\{\varepsilon_\nu\}$ une suite de nombres non-négatifs tendant vers zéro. D'après la définition de $L[S]$, il existe une suite $\{\mathfrak{P}_n^{(\nu)}\}$ de surfaces simples polyédriques tendant vers S, telle que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A[\mathfrak{P}_n^{(\nu)}] < L[S] + \varepsilon_\nu.$$

Cette suite contient donc un élément $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ dont l'écart de S est inférieur à ε_ν et qui satisfait en outre à l'inégalité

$$A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] < L[S] + \varepsilon_\nu.$$

La suite $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$, ainsi obtenue, tend vers S et l'inégalité précédente montre que

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] \leqq L[S].$$

D'ailleurs, par définition,

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] \geqq L[S],$$

donc, puisque la limite inférieure ne saurait dépasser la limite supérieure,

$$\overline{\lim}\ A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] = \underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}^{(\nu)}] = L[S]$$

Donc, la suite $\{A[\mathfrak{P}^{(\nu)}]\}$ est convergente et tend vers $L[S]$.

Les propriétés que nous venons d'indiquer déterminent la fonctionnelle $L[S]$. D'une manière précise soit $L^*[S]$ une fonctionnelle définie dans le champ des surfaces simples et jouissant des propriétés suivantes :

---

[4]) Geöcze a démontré le théorème important que pour les surfaces simples l'aire $L_*[S]$, donc a fortiori l'aire $L[S]$, est toujours supérieure à zéro (Sur la théorie de la quadrature (en hongrois), *Mathematikai és természettudomdnyi értesitő* **31**, 1913, pp. 306—318).

a) On a pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers la surface simple S
$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \geqq L^*[S].$$

b) Il existe des suites $\{\mathfrak{P}_n\}$, tendant vers S, pour lesquelles
$$\lim A[\mathfrak{P}_n] = L^*[S].$$
Dans ces conditions, on a identiquement $L[S] = L^*[S]$. La démonstration est immédiate. En effet, en tenant compte de la définition de $L[S]$, la propriété *a)* de $L^*[S]$ montre d'abord que $L^*[S] \leqq L[S]$, tandis que la propriété *b)* de $L^*[S]$ fournit l'inégalité inverse.

On se rend maintenant aisément compte des réflexions qui ont conduit M. Lebesgue à sa définition de l'aire. D'abord, la propriété *b)* exprime une hypothèse fondamentale: l'aire d'une surface courbe peut être calculée à l'aide de polyèdres d'approximation convenablement choisis. D'autre part, on sait depuis l'exemple célèbre donné par H. A. Schwarz que les polyèdres inscrits ne jouent pas le même rôle distingué dans la théorie de l'aire que les polygones inscrits dans la théorie de la longueur; l'analyse de cet exemple conduit en outre à une observation importante, résumée et généralisée dans l'énoncé de la propriété *a)*. On vérifie d'ailleurs facilement que la longueur des courbes jouit de propriétés analogues; donc, la longueur des courbes est susceptible d'une définition absolument analogue à celle de l'aire $L[S]$.[5])

5. La fonctionnelle $L[S]$ possède la propriété fondamentale d'être *semi-continue inférieurement;* cela signifie que l'on a, pour toute suite $\{S_n\}$ de surfaces simples tendant vers une surface simple S
$$\underline{\lim}\ L[S_n] \geqq L[S]$$ [6])

Pour démontrer cette propriété, prenons une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres positifs tendant vers zéro, et soit $\mathfrak{P}_n$ une surface simple polyédrique telle que l'écart de $\mathfrak{P}_n$ et de S_n soit inférieur à ε_n et que l'on ait de plus
$$A[\mathfrak{P}_n] < L[S_n] + \varepsilon_n, \tag{1}$$
d'après la définition de $L[S_n]$, un tel choix de $\mathfrak{P}_n$ est toujours possible. Ces polyèdres $\mathfrak{P}_n$ tendent, à cause de $\varepsilon_n \to 0$, vers S; par conséquent, en vertu de la définition même de $L[S]$,

---

[5]) M. H. Lebesgue a exposé récemment la suite des idées qui l'ont conduit à sa définition de l'aire (Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces, *Fundamenta Mathematicae,* t. VIII, 1926, pp. 160—165).

[6]) H. Lebesgue, l. c. [1]).

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S]. \qquad (2)$$

D'autre part, il résulte de la relation (1) que

$$\underline{\lim}\ A[\mathfrak{P}_n] \leqq \underline{\lim}\ L[S_n]; \qquad (3)$$

on aura donc, en vertu de (2), (3),

$$\underline{\lim}\ L[S_n] \geqq L[S], \qquad (3')$$

et la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $L[S]$ est démontrée. En voilà un corollaire immédiat qui nous sera très utile plus loin. *Soit* $\{S_n\}$ *une suite de surfaces simples tendant vers la surface simple S, et telles que* $L[S_n] \leqq L[S]$. *Dans ces conditions, on aura* $L[S_n] \to L[S]$. En effet, de l'hypothèse $L[S_n] \leqq L[S]$ il résulte

$$\overline{\lim}\ L[S_n] \leqq L[S];$$

en comparant cette inégalité à (3'), on obtient la proposition énoncée.

L'utilité de cette proposition pour le calcul de l'aire $L[S]$ est évidente. On cherchera à déterminer une suite $\{S_n\}$ tendant vers la surface proposée S et jouissant des propriétés suivantes:

α) Les S_n appartiennent à une classe de surfaces dont on sait déjà calculer l'aire.

β) On a $L[S_n] \leqq L[S]$.

En vertu de la proposition précédente, on aura dans ces conditions $L[S_n] \to L[S]$, et l'aire $L[S]$ se trouve ainsi représentée comme la limite d'une suite convergente de quantités connues. Pour appliquer cette méthode, il faut savoir construire des *surfaces d'approximation dont les aires soient inférieures à l'aire de la surface proposée.* L'intuition géométrique apprend que l'on diminue l'aire d'une surface en rendant son allure plus uniforme; cette observation pratique, jointe aux remarques précédentes, nous permettra d'établir, au § 3, d'une manière très simple certaines formules générales pour l'aire.

6. D'après la définition de l'aire $L[S]$, il existe une suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de surfaces simples polyédriques dont les aires élémentaires tendent vers $L[S]$; mais pour obtenir une telle suite, il n'est ni nécessaire ni suffisant de choisir $\mathfrak{P}_n$ parmi les polyèdres *inscrits* dans la surface proposée.[7]) Ajoutons que l'on ne connaît pas la

[7]) C'est ce qui ressort de l'exemple donné par H. A. Schwarz (Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe, Gesammelte mathematische Abhandlungen 2, pp. 309—311). Cf. aussi M. Fréchet, Sur l'aire des surfaces polyédrales, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique,* t. III, 1925, pp. 1—3.

construction générale d'une suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ telle que $A[\mathfrak{P}_n] \to L[S]$ Il est cependant évident que ce problème, appelé par Geöcze *problème de la quadrature,*[8]) serait résolu si l'on pouvait construire la suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ de manière que les aires élémentaires $A[\mathfrak{P}_n]$ soient inférieures à $L[S]$. En effet, pour une telle suite on aurait d'abord

$$\overline{\lim}\; A[\mathfrak{P}_n] \leqq L[S],$$

d'autre part, en vertu de la définition de $L[S]$,

$$\underline{\lim}\; A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S],$$

donc $\lim A[\mathfrak{P}_n] = L[S]$. Cette remarque explique aussi pourquoi les polyèdres inscrits ne jouent pas le même rôle dans la théorie de l'aire que les polygones inscrits dans la théorie de la longueur. Toute ligne polygonale inscrite dans une courbe a une longueur au plus égale à la longueur de la courbe, tandis que la propriété analogue ne subsiste pas en général dans le cas des surfaces. La propriété essentielle d'une ligne polygonale inscrite dans une courbe ne consiste donc pas à avoir ses sommets situés sur la courbe, mais à avoir une longueur inférieure à la longueur de celle-ci. Cette observation conduit à présenter la définition de l'aire $L[S]$ de la manière suivante.

Soit ε un nombre positif et soit $\{\mathfrak{P}\}_\varepsilon$ l'ensemble des surfaces simples polyédriques dont l'écart de la surface proposée S ne dépasse pas ε. Si, à l'aide de quelque loi simple, on pourrait indiquer dans $\{\mathfrak{P}\}_\varepsilon$ un polyèdre $\mathfrak{P}$ dont l'aire élémentaire $A[\mathfrak{P}]$ soit inférieure à l'aire de S, on prendrait $A[\mathfrak{P}]$ comme valeur approchée de l'aire de S. À défaut d'une telle loi, le mieux que l'on puisse faire consiste donc à considérer, comme valeur approchée de l'aire de S, la limite inférieure de $A[\mathfrak{P}]$ pour l'ensemble $\{\mathfrak{P}\}_\varepsilon$. En désignant cette limite inférieure par $M[S;\varepsilon]$, on a évidemment

$$M[S;\varepsilon'] \geqq M[S;\varepsilon''] \text{ pour } \varepsilon' \leqq \varepsilon'',$$

de sorte que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M[S;\varepsilon]$$

existe. Soit $M[S]$ cette limite; les considérations précédentes conduisent à définir $M[S]$ comme aire de S. On montre facilement

[8]) Z. de Geöcze, Quadrature des surfaces courbes, Thèse, Paris, 1908 (publiée aux *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, **26**, 1910, pp. 1—88).

que cette définition est équivalente à celle de M. LEBESGUE.[9]) Soit en effet $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S, et soit ε_n l'écart de $\mathfrak{P}_n$ et de S. On aura par définition $M[S;\varepsilon_n] \leqq A[\mathfrak{P}_n]$, d'où, pour $n \to \infty$,

$$M[S] \leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers S, il vient $M[S] \leqq L[S]$. Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Par la définition de $M[S;\varepsilon_n]$, il existe une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_n$ dont l'écart de S ne dépasse pas ε_n et pour laquelle $M[S;\varepsilon_n] > A[\mathfrak{P}_n] - {}^1/n$. On a donc, pour $n \to \infty$,

$$M[S] \geqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n].$$

D'ailleurs, puisque $\mathfrak{P}_n \to S$,

$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] \geqq L[S],$$

donc $M[S] \geqq L[S]$.

7. M. FRÉCHET fit observer[10]) que l'on peut arriver à la définition de l'aire au sens de M. LEBESGUE en cherchant à *prolonger la fonctionnelle* $A[\mathfrak{P}]$, c'est-à-dire en cherchant à définir, dans le champ des surfaces simples, une fonctionnelle égale à l'aire élémentaire pour les surfaces polyédriques et jouissant dans tout son champ de définition de quelque propriété caractéristique de l'aire élémentaire $A[\mathfrak{P}]$. En considérant comme propriété caractéristique la semi-continuité inférieure, on est conduit à chercher une fonctionnelle $F[S]$ jouissant des propriétés suivantes.

α) $F[S]$ est définie dans le champ des surfaces simples.

β) Pour toute surface simple polyédrique, F est égale à l'aire élémentaire.

γ) $F[S]$ est semi-continue inférieurement.

Ces conditions ne suffisent pas encore pour déterminer $F[S]$; en effet, si $F[S]$ satisfait à ces conditions, et si S_0 est une surface simple déterminée non-polyédrique, on obtient une fonctionnelle

---

[9]) Il s'agit évidemment du fait, observé par M. LEBESGUE dans sa Thèse, qu'en vertu de sa qualité de fonctionnelle semi-continue inférieurement l'aire est égale à son minimum local. Une petite discussion est cependant nécessaire, puisque nous ne savons pas encore que pour les surfaces polyédriques l'aire L coïncide avec l'aire élémentaire.

[10]) M. FRÉCHET, Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes, *Fundamenta Mathematicae*, t. VII, pp. 210—224.

$F^*[S]$ jouissant de ces mêmes propriétés et différente de $F[S]$ en posant par exemple

$$F^*[S]=F[S] \text{ pour } S \neq S_0, F^*[S_0]=F[S_0]-1.$$

M. Fréchet ajoute donc une quatrième condition, savoir que $F[S]$ soit aussi peu discontinue que possible; cette condition peut être remplacée par la suivante:

δ) Pour toute surface simple S, il existe une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S, dont les aires élémentaires tendent vers $F[S]$.

Les quatre conditions $\alpha)$—$\delta)$ sont caractéristiques. D'une manière précise: deux fonctionnelles F, F^* jouissant des propriétés $\alpha)$—$\delta)$ sont identiques. En effet, soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers la surface simple S, pour laquelle

$$\lim A[\mathfrak{P}_n]=F^*[S];$$

une telle suite existe bien en vertu de δ). La relation précédente s'écrit, par égard à β),

$$\lim F[\mathfrak{P}_n]=F^*[S].$$

D'autre part, en vertu de γ),

$$\underline{\lim}\, F[\mathfrak{P}_n]\geqq F[S],$$

donc $F^*[S]\geqq F[S]$. L'inégalité inverse se démontre de la même façon; on a donc $F\equiv F^*$.

Les conditions $\alpha)$—$\delta)$ définissent donc d'une manière univoque une fonctionnelle; on arrive ainsi à une *définition descriptive de l'aire*. Bien entendu, il faut démontrer que les conditions $\alpha)$—$\delta)$ sont compatibles. M. Fréchet suppose donc que l'on ait déjà prouvé que l'aire élémentaire est une fonctionnelle semi-continue inférieurement dans le champ des surfaces polyédriques.[11]) La compatibilité des conditions $\alpha)$—$\delta)$ résulte aussi du fait, équivalent au théorème élémentaire mentionné, que la fonctionnelle $L[S]$ coïncide, pour les surfaces polyédriques, avec l'aire élémentaire. Nous obtiendrons ce résultat, comme corollaire de considérations plus générales, au § 2. L'aire $L[S]$ satisfait donc aux quatre conditions $\alpha)$—$\delta)$, et c'est la seule fonctionnelle qui y satisfasse.

8. Nous terminons ce chapitre par la proposition suivante qui montre que *l'aire* $L[S]$ *a le caractère d'une mesure intérieure.*

---

[11]) M. Fréchet a fourni une démonstration directe de ce fait élémentaire; voir: La semi-continuité en géométrie élémentaire, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, 1924.

Soient S_1, S_2 deux surfaces simples sans points communs intérieurs, situées sur une troisième surface simple S; on aura

$$L[S_1]+L[S_2]\leqq L[S].$$

Pour le montrer, soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S et telles que

$$A[\mathfrak{P}_n]\to L[S]. \tag{3''}$$

Puisque $\mathfrak{P}_n$ tend vers S, il existe une transformation topologique T_n de S en $\mathfrak{P}_n$, telle que

$$\|T_n\|<\varepsilon_n, \text{ avec } \varepsilon_n\to 0.$$

Soient $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ les images de S_1, S_2 par T_n. Considérons par ex. $S_1^{(n)}$. Puisque $S_1^{(n)}$ est située sur une surface simple polyédrique, on peut construire sur $S_1^{(n)}$ une ligne polygonale simple et fermée $\mathfrak{p}_1^{(n)}$, délimitant sur $S_1^{(n)}$ un domaine $D_1^{(n)}$, tel que $D_1^{(n)}+\mathfrak{p}_1^{(n)}$ est une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ dont l'écart de $S_1^{(n)}$ est moindre que ε_n.[12]) Il existe de même une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_2^{(n)}$, située sur $S_2^{(n)}$, dont l'écart de $S_2^{(n)}$ est moindre que ε_n Puisque $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ et $\mathfrak{P}_2^{(n)}$ n'ont pas de points communs intérieurs, on a

$$A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]+A[\mathfrak{P}_2^{(n)}]\leqq A[\mathfrak{P}_n] \tag{4}$$

D'autre part, puisque d'après la construction $\mathfrak{P}_1^{(n)}\to S_1$, $\mathfrak{P}_2^{(n)}\to S_2$, on aura

$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]\geqq L[S_1],\ \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_2^{(n)}]\geqq L[S_2],$$

d'où, en tenant compte de (3″) et de (4),

$$L[S_1]+L[S_2]\leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]+\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_2^{(n)}]\leqq$$

$$\leqq \underline{\lim}\,(A[\mathfrak{P}_1^{(n)}]+A[\mathfrak{P}_2^{(n)}])\leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]=L[S].$$

Plus généralement, si sur une surface simple S on considère un nombre quelconque de surfaces simples $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sans points communs intérieurs, on aura

$$L[S_1]+\ldots+L[S_k]\leqq L[S];$$

la démonstration est la même que pour $k=2$.

Considérons en particulier une décomposition d'une surface simple S par un arc simple en deux surfaces simples S_1, S_2. L'inégalité

$$L[S_1]+L[S_2]\leqq L[S]$$

montre que l'aire L est une *mesure intérieure.* Rappelons que plusieurs d'entre les autres définitions de l'aire conduisent à des

---

12) Ce fait résulte facilement des développements dans le livre de M. B. de KERÉKJÁRTÓ, Vorlesungen über Topologie I, zweiter Abschnitt, § 2.

fonctionnelles satisfaisant à l'inégalité inverse[13]); en désignant par $F[S_1]$, $F[S_2]$, $F[S]$ les aires de S_1, S_2, S au sens d'une telle définition, on a

$$F[S_1]+F[S_2] \geqq F[S]$$

Il en résulte que si les fonctionnelles L et F fournissent les mêmes valeurs pour les aires de S_1, S_2, S, on aura

$$L[S_1]+L[S_2]=L[S]$$

Mais il est aisé de voir, par ex. dans le cas où tous les points de S sont situés dans un même plan (cf. § 2, n° 5), que cette relation n'est pas vérifiée en général. Par conséquent, les fonctionnelles L et F ne peuvent coïncider que pour certaines classes particulières de surfaces simples. On voit aussi que la recherche de ces classes de surfaces est liée à l'étude de l'additivité de la fonctionnelle L.

§ 2. Théorèmes sur la projection orthogonale.

1. Soit Δ un triangle et Δ' la projection orthogonale de Δ sur un plan $\mathbf{p}$. En désignant les aires élémentaires des triangles Δ, Δ' par les mêmes lettres, on a $\Delta'=\Delta\cos\theta$, où θ est l'angle aigu formé par les plans de Δ et de Δ'. Il en résulte d'abord

$$\Delta' \leqq \Delta; \tag{5}$$

puis, en désignant par $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ trois plans formant un trièdre orthogonal, et par $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ les projections de Δ sur ces plans,

$$\Delta=\left((\Delta')^2+(\Delta'')^2+(\Delta''')^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Soit maintenant $\mathfrak{P}$ une surface simple polyédrique, et soient Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$ les faces triangulaires de $\mathfrak{P}$. Désignons de nouveau par $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_k$ les projections orthogonales de ces triangles sur le plan $\mathbf{p}$, et par $\mathfrak{P}'$ la projection orthogonale de $\mathfrak{P}$ sur le même plan. D'une manière précise, $\mathfrak{P}'$ est l'ensemble des points du plan $\mathbf{p}$ qui sont projection orthogonale d'au moins un point de $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}'$ est un ensemble fermé, évidemment mesurable, même au sens de Jordan. Soit $m\mathfrak{P}'$ la mesure de $\mathfrak{P}'$, $A[\mathfrak{P}]$ l'aire élémentaire de $\mathfrak{P}$. On aura l'inégalité

$$m\mathfrak{P}' \leqq A[\mathfrak{P}]; \tag{7}$$

[13]) Cf. Zoretti-Rosenthal, Die Punktmengen, Enzyklopädie der math. Wissenschaften IIC9a, en particulier pp. 990—1001. — Voir aussi I. P. Schauder, The theory of surface measure, *Fundamenta Mathematicae* t. VIII, 1926, pp. 1—48.

en effet, tout point de $\mathfrak{P}'$ est contenu dans l'un au moins des triangles fermés $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_k$, de sorte que, en vertu de (5),

$$m\,\mathfrak{P}' \leqq \Delta'_1 + \ldots + \Delta'_k \leqq \Delta_1 + \ldots + \Delta_k = A[\mathfrak{P}].$$

On obtient une seconde inégalité de ce genre en considérant trois plans $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ formant un trièdre orthogonal. En employant les notations précédentes, on aura d'abord

$$m\,\mathfrak{P}' \leqq \Delta'_1 + \ldots + \Delta'_k, \quad m\,\mathfrak{P}'' \leqq \Delta''_1 + \ldots + \Delta''_k, \quad m\,\mathfrak{P}''' \leqq \Delta'''_1 + \ldots + \Delta'''_k \tag{8}$$

Rappelons maintenant l'inégalité élémentaire, fondamentale pour tous les développements suivants,

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)^2\right]^{1/2} \leqq \sum_{i=1}^{k} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^{1/2}. \tag{9}$$

Cette inégalité, dans laquelle a_i, b_i, c_i sont des quantités réelles quelconques, exprime, pour l'espace à trois dimensions, le fait que la longueur du vecteur résultant est au plus égale à la somme des longueurs des vecteurs composants. En y faisant $a_i = \Delta'_i$, $b_i = \Delta''_i$, $c_i = \Delta'''_i$, il vient de (8)

$$[(m\,\mathfrak{P}')^2 + (m\,\mathfrak{P}'')^2 + (m\,\mathfrak{P}''')^2]^{1/2} \leqq \sum_{i=1}^{k} \left((\Delta'_i)^2 + (\Delta''_i)^2 + (\Delta'''_i)^2\right)^{1/2}.$$

Or, en tenant compte de (6), le second membre est égal à

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta_i = A[\mathfrak{P}];$$

par conséquent

$$[(m\,\mathfrak{P}')^2 + (m\,\mathfrak{P}'')^2 + (m\,\mathfrak{P}''')^2]^{1/2} \leqq A[\mathfrak{P}]. \tag{10}$$

2. Considérons à présent une surface simple S, et soit S' la projection orthogonale de S sur un plan $\mathbf{p}$. Cet ensemble S' est fermé, donc mesurable; en désignant sa mesure par $m\,S'$, on constate aisément que l'inégalité $m\,S' \leqq L[S]$, qui correspondrait à l'inégalité élémentaire (7), n'est pas vérifiée en général. Soit par exemple C une courbe simple et fermée dans le plan $\mathbf{p}$, D le domaine intérieur à C, et $S = D + C$. Nous verrons plus loin que dans ce cas $L[S]$ est égale à la mesure de D; d'autre part, puisque dans le cas actuel $S' \equiv S = D + C$, $m S'$ est égale à la mesure de $D + C$ Donc, la courbe C étant générale, on aura $m\,S' > L[S]$. Dans le cas que nous venons de considérer, il suffirait de négliger les points frontières de la projection orthogonale S' pour obtenir un ensemble dont la mesure fournit une borne inférieure pour l'aire $L[S]$. On voit aisément que cette remarque ne s'étend point aux surfaces simples quelconques; tout de même, elle indique la voie à suivre. Pour obtenir, à l'aide de projections orthogonales, des bornes inférieures pour l'aire $L[S]$, il faudra négliger certains points de la projection orthogonale S'. La difficulté consiste à caractériser ceux des points de S' que l'on peut conserver sans risquer d'obtenir un ensemble dont la mesure ne fournit plus une borne inférieure pour l'aire.

Ces observations conduisent à des problèmes de nature topologique dont l'étude approfondie serait d'une importance considérable pour la théorie de l'aire. Dans cet ordre d'idées, Geöcze a obtenu des résultats importants[14]) à l'aide d'un raisonnement simple et général que nous allons d'abord exposer d'une manière précise. À cet effet, il est utile d'introduire la notion du *noyau de la projection orthogonale d'une surface simple S Le noyau de la projection orthogonale S de la surface simple S sur le plan* **p** *est constitué par les points P jouissant de la propriété suivante: il existe un nombre positif $\delta = \delta(P)$, dépendant du point P, de sorte que P est contenu dans la projection orthogonale de toute surface simple S^* dont l'écart de S est inférieur à δ.* Pour ne pas devoir discuter la mesurabilité du noyau, nous considérons seulement l'ensemble de ses points intérieurs, le *noyau restreint.* C'est un ensemble ouvert (ou vide) et par conséquent mesurable. Nous allons montrer que les inégalités élémentaires (7) et (10) se généralisent aux surfaces simples quelconques, à condition de remplacer les projections orthogonales par les noyaux restreints.

Intercalons ici une remarque qui nous sera utile plus tard. Soient S_1, S_2 deux surfaces simples, et supposons que S_1 soit sous-ensemble de S_2. Désignons par N_1, N_2 les noyaux restreints des projections orthogonales de S_1, S_2 sur un même plan **p**. *Alors N_1 est sous-ensemble de N_2.* Pour le voir, il suffit évidemment de prouver: si P_1 est un point de N_1, et $\{S_n^{(2)}\}$ une suite quelconque de surfaces simples tendant vers S_2, le point P_1 est contenu pour n assez grand dans la projection orthogonale de $S_n^{(2)}$ sur **p**. Puisque $S_n^{(2)} \to S_2$, on peut indiquer, pour $n = 1, 2, \ldots$, une transformation topologique T_n entre $S_n^{(2)}$ et S_2, de sorte que $\|T_n\| \to 0$. La surface S_1 étant sous-ensemble de S_2, T_n fait correspondre à S_1 une surface simple $S_n^{(1)}$, sous-ensemble de $S_n^{(2)}$. À cause de $\|T_n\| \to 0$, on

[14]) Cf. en particulier ses travaux: Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes, *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* **27**, 1909, pp. 1—21 et 131—163.

a $S_n^{(1)} \to S_1$; par conséquent, en vertu de la définition du noyau, le point P_1 sera contenu, pour n assez grand, dans la projection orthogonale de $S_n^{(1)}$ sur **p**, donc a fortiori dans celle de $S_n^{(2)}$, puisque $S_n^{(1)}$ est sous-ensemble de $S_n^{(2)}$.

3. Soit N le noyau restreint de la projection orthogonale d'une surface simple S sur le plan **p**. Nous allons démontrer l'inégalité

$$m\, N \leqq L\,[S] \tag{11}$$

généralisant l'inégalité élémentaire (7). Soit $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S et soit $\mathfrak{P}'_n$ la projection orthogonale de $\mathfrak{P}_n$ sur le plan **p**. Puisque $\mathfrak{P}_n$ tend vers S, il résulte de la détinition du noyau restreint que tout point de N est contenu, pour n assez grand, dans $\mathfrak{P}'_n$. En désignant par H_n le produit des ensembles mesurables $\mathfrak{P}'_n$ et N, H_n est un sous-ensemble mesurable de N et tout point de N est contenu dans H_n pour n assez grand. Il en résulte, en vertu des premiers théorèmes sur la mesure, que $m\,H_n \to m\,N$. D'autre part, H_n étant sous-ensemble de $\mathfrak{P}'_n$, $m H_n \leqq m\,\mathfrak{P}'_n$. L'inégalité élémentaire (7) fournit $m\,\mathfrak{P}'_n \leqq A\,[\mathfrak{P}_n]$. En combinant les relations précédentes, il vient

$$m N \leqq \underline{\lim}\; A\,[\mathfrak{P}_n].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers S, on en déduit, en vertu de la définition de l'aire L, la relation (11).

Considérons en second lieu trois plans $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ formant un trièdre rectangulaire, et soient N_1, N_2, N_3 les noyaux restreints des projections orthogonales de S sur ces plans. Nous établirons l'inégalité, généralisation de l'inégalité élémentaire (10),

$$[(m\,N_1)^2 + (m\,N_2)^2 + (m\,N_3)^2]^{1/2} \leqq L\,[S] \tag{12}$$

Soit de nouveau $\{\mathfrak{P}_n\}$ une suite de surfaces simples polyédriques tendant vers S et soient $\mathfrak{P}'_n, \mathfrak{P}''_n, \mathfrak{P}'''_n$ les projections orthogonales de $\mathfrak{P}_n$ sur les plans $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. On obtient d'abord comme précedemment les inégalités

$$m N_1 \leqq \underline{\lim}\; m\,\mathfrak{P}'_n,\quad m N_2 \leqq \underline{\lim}\; m\,\mathfrak{P}''_n,\quad m N_3 \leqq \underline{\lim}\; m\,\mathfrak{P}'''_n.$$

Il en résulte

$$[(mN_1)^2+(mN_2)^2+(mN_3)^2]^{1/2} \leqq [(\underline{\lim}\, m\mathfrak{P}'_n)^2+(\underline{\lim}\, m\mathfrak{P}''_n)^2+(\underline{\lim}\, m\,\mathfrak{P}'''_n)^2]^{1/2}$$

$$\leqq \underline{\lim}\; [(m\,\mathfrak{P}'_n)^2+(m\,\mathfrak{P}''_n)^2+(m\,\mathfrak{P}'''_n)^2]^{1/2};$$

donc, en tenant compte de l'inégalité élémentaire (10),

$$[(m N_1)^2 + (m N_2)^2 + (m N_3)^2]^{1/2} \leqq \underline{\lim}\; A\,[\mathfrak{P}_n].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tendant vers S, on en conclut la relation (12).

4. À l'aide des inégalités (11) et (12), on obtient des bornes inférieures pour l'aire $L[S]$ d'une surface simple quelconque, mais ces bornes inférieures présentent, du point de vue des applications, un caractère hypothétique, à cause des noyaux restreints qui y in erviennent. En effet, il est évident qu'en introduisant les noyaux restreints, nous n'avons effectué qu'une transformation des difficultés signalées au n° 2. Pour arriver à des bornes inférieures pratiquables, une étude approfondie des noyaux restreints serait nécessaire; les bornes obtenues seront d'autant plus précises que l'on connaît mieux les noyaux. À défaut de résultats généraux, nous nous bornerons à indiquer quelques conséquences particulières des inégalités (11) et (12); les bornes inférieures que nous obtiendrons présenteront le caractère particulier de ne dépendre que de la courbe frontière de la surface simple considérée.

Soit C la frontière de la surface simple S; C est une courbe continue simple et fermée. Un point P décrivant C, la projection orthogonale P' de P sur le plan **p** décrira une courbe continue fermée C'; bien entendu, le point P' peut revenir, pendant le parcours, plusieurs fois à la même position. Soit alors O un point du plan **p**, non situé sur la courbe C'; l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ variera d'une façon continue pendant le parcours.[15]) La variation, pendant un parcours complet, de l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$, divisée par 2π, s'appelle comme on sait *l'indice* du point O par rapport à la courbe continue C'. *Si l'indice du point O par rapport à C' est différent de zéro, nous pouvons affirmer que le point O est contenu dans le noyau restreint de la projection de S sur* **p**.

Pour le voir, soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces simples tendant vers S. On aura alors, pour $n=1, 2, \ldots$, une transformation topologique T_n de S en S_n, de sorte que $\|T_n\| \to 0$. Soit P_n le point de S_n correspondant par la transformation T_n au point P de S. Le point P décrivant la frontière C de S, P_n décrira la frontière C_n de S_n, et la distance PP_n sera au plus égale à $\|T_n\|$, quantité

[15]) Concernant cette notion si importante de la variation de l'argument d'un vecteur, le lecteur trouvera tous les renseignements nécessaires dans le livre de M. Kerékjártó, l c. [12]).

qui tend vers zéro. En passant aux projections orthogonales, nous voyons que la distance des points P' et P'_n tend uniformément vers zéro pour $n \to 0$. Il en résulte, puisque le point O n'est pas situé sur C', que pour n assez grand O ne sera pas situé sur C'_n, et en second lieu que l'indice de O par rapport à C'_n tend vers l'indice de O par rapport à C', c'est-à-dire vers une quantité qui est différente de zéro par hypothèse. Par conséquent, pour n assez grand l'indice de O par rapport à C'_n sera également différente de zéro. Il en résulte aisément que O est contenu, pour ces valeurs assez grandes de n, dans la projection de S_n. Pour réduire cette assertion à un théorème familier, il est commode d'introduire dans le plan **p** une variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$, où ξ, η désignent des coordonnées cartésiennes. La transformation qui fait correspondre à tout point P_n de S_n sa projection P'_n s'exprimera alors par une formule $f_n(P_n) = \zeta$, où $f_n(P_n)$ est une fonction complexe uniforme et continue du point P_n sur S_n. Si ζ_0 est l'affixe du point O, il s'agit évidemment de démontrer que pour n assez grande la fonction $f_n(P_n) - \zeta_0$ s'annule quelque part sur S_n. Or, la variation de l'argument de la fonction $f_n(P_n) - \zeta_0$ sur la frontière C_n de S_n est égale, à un facteur 2π près, à l'indice de O par rapport à C'_n, donc différente de zéro pour n assez grand. Il en résulte que $f_n(P_n) - \zeta_0$ doit s'annuler quelque part sur S_n; en effet, s'il en était autrement, la variation de l'argument de cette fonction sur la frontière de S_n serait égale à zéro, on vertu du *théorème de monodromie.*[16])

Pour n assez grand, le point O est donc contenu dans la projection orthogonale de S_n sur **p**. La suite $\{S_n\}$ étant quelconque, cela démontre que le point O est contenu dans le noyau de la projection orthogonale de S sur **p**. Pour voir que O appartient au noyau restreint, il suffit d'observer que si un point O jouit des propriétés supposées (savoir que O n'est pas situé sur C' et que l'indice de O par rapport à C' est différent de zéro), tout point contenu dans un voisinage suffisamment restreint de O jouit évidemment de ces mêmes propriétés, et appartient par conséquent an noyau. Le point O est donc un point intérieur du noyau; donc, par définition, O est contenu dans le noyau restreint.

5. On obtient un cas particulier important en admettant que la projection C' de la courbe C soit aussi une courbe simple, c'est-à-dire que deux points distincts de C ont pour projections

[16]) Voir l. c. [12]), p. 175.

deux points distincts. En ce cas, l'indice de tout point intérieur à C' est $+1$ ou -1, donc $\neq 0$; par conséquent, tout point intérieur à C' appartient au noyau restreint de la projection de S sur $\mathbf{p}$. Considérons en particulier une surface simple S limitée par une courbe plane simple et fermée C. Soit $\mathbf{p}$ le plan contenant C, et D le domaine intérieur à C. La remarque précédente montre que tout point de D est contenu dans le noyau restreint de la projection orthogonale de S sur $\mathbf{p}$; par conséquent, en vertu de l'inégalité (11), $mD \leqq L[S]$. Cette inégalité correspond au fait intuitif que *toute surface simple limitée par une courbe plane possède une aire au moins égale à l'aire du domaine plan intérieur à cette courbe.*

Reprenons les notations précédentes, en supposant que $S = D + C$, c'est-à-dire que tout point de S soit contenu dans le plan $\mathbf{p}$. Montrons que l'on a dans ce cas $L[S] = mD$, c'est-à-dire que l'aire est égale à la mesure intérieure, au sens de Jordan, de l'ensemble de points $S = D + C$. Pour le voir, nous nous servirons du théorème topologique qu'il existe, à l'intérieur de la courbe C, une suite $\{\mathfrak{p}_n\}$ de lignes polygonales simples et fermées, de sorte qu'en désignant par D_n le domaine intérieur à $\mathfrak{p}_n$, les surfaces simples polyédriques $\mathfrak{P}_n = D_n + \mathfrak{p}_n$ tendent vers $S = D + C$ (cf. [12]). On aura pour l'aire élémentaire des surfaces polyédriques ainsi construites $A[\mathfrak{P}_n] < mD$; d'autre part, nous avons démontré plus haut que $mD \leqq L[S]$. Nous avons donc les inégalités

$$A[\mathfrak{P}_n] < mD \leqq L[S]. \tag{13}$$

Il en résulte, puisque $\mathfrak{P}_n \to S$, la relation $A[\mathfrak{P}_n] \to L[S]$, en vertu d'une remarque faite au début du n° 6, § 1. En faisant maintenant $n \to \infty$ dans (13), on obtient la proposition $mD = L[S]$.

En appliquant ce résultat à une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}$ constitué par un seul triangle, il résulte que dans ce cas spécial $L[\mathfrak{P}] = A[\mathfrak{P}]$. Soit maintenant $\mathfrak{P}$ une surface simple polyédrique constitué par plusieurs triangles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. En considérant chacun de ces triangles comme une surface simple, nous aurons en vertu de la remarque précédente

$$A[\mathfrak{P}] = A[\Delta_1] + \ldots + A[\Delta_k] = L[\Delta_1] + \ldots + L[\Delta_k].$$

D'autre part (§ 1, n° 8)

$$L[\mathfrak{P}] \geqq L[\Delta_1] + \ldots + L[\Delta_k],$$

donc $L[\mathfrak{P}] \geqq A[\mathfrak{P}]$. L'inégalité inverse est immédiate. Posons en effet $\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{P}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Cette suite $\{\mathfrak{P}_n\}$ tend vers $\mathfrak{P}$; donc, par définition,

$$L[\mathfrak{P}] \leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n],$$

d'où, puisque $A[\mathfrak{P}_n] = A[\mathfrak{P}]$, il vient $L[\mathfrak{P}] \leqq A[\mathfrak{P}]$. On obtient ainsi le théorème: *pour toute surface simple polyédrique, l'aire L coïncide avec l'aire au sens élémentaire.*

6. Reprenons les notations du n° 4 et introduisons dans le plan **p** des coordonnées cartésiennes ξ, η. Considérons dans le plan **p** un rectangle ouvert défini par des inégalités $\xi_1 < \xi < \xi_2$, $\eta_1 < \eta < \eta_2$; nous allons indiquer un cas où l'on peut affirmer que tout point de ce rectangle est contenu dans le noyau restreint de la projection orthogonale de S sur **p**.

Supposons qu'il soit possible de diviser la courbe C, à l'aide de quatre points distincts, en quatre arcs $l_{\xi_1}, l_{\eta_1}, l_{\xi_2}, l_{\eta_2}$, se succédant dans cet ordre cyclique sur C, de sorte que les projections de ces arcs soient contenues respectivement dans les demi-plans $\xi < \xi_1$, $\eta < \eta_1$, $\xi > \xi_2$, $\eta > \eta_2$. *Dans ces conditions, tout point du rectangle ouvert $\xi_1 < \xi < \xi_2$, $\eta_1 < \eta < \eta_2$ appartient au noyau restreint de la projection de S sur* **p**.[17])

Soit en effet O un point de ce rectangle ouvert. En désignant par P' la projection orthogonale du point P sur **p**, suivons la variation de l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ pendant que P décrit par exemple l'arc l_{ξ_1}. Le point P' décrira un arc continu, situé par hypothèse dans le demi-plan $\xi < \xi_1$. Ce demi-plan ne contenant pas le point O, la variation de l'argument du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ ne dépendra que de la position initiale et de la position finale du point P'. La variation considérée est donc égale à celle qui résulterait si le point P' décrivait, en se mouvant toujours dans le même sens, le segment rectiligne rejoignant ces deux positions. En répétant le même raisonnement pour les arcs $l_{\eta_1}, l_{\xi_2}, l_{\eta_2}$, on voit finalement que l'indice du point O par rapport à C' est égal à l'indice par rapport à un quadrilatère dont les sommets sont les projections des quatre points déterminant les arcs $l_{\xi_1}, \ldots, l_{\eta_2}$ sur la courbe C. Des hypothèses admises sur la situation des projections de ces arcs il résulte immédiatement que les côtés de ce quadrilatère ne s'entre-coupent pas et que le point O est situé à son intérieur; par conséquent, l'indice est égal à $\pm 1 \neq 0$, ce qui démontre (§ 2, n° 4) que le point O est contenu dans le noyau restreint de la projection de S sur **p**.

[17]) Geöcze, l. c. [14]).

7. Appliquons ce résultat à une surface S donnée par une équation $z=f(x,y)$, la fonction $f(x,y)$ étant uniforme et continue dans le carré fermé $Q:0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1$. Nous obtiendrons des limites inférieures explicites pour l'aire $L[S]$

Soit R un rectangle contenu dans Q et défini par $x'\leqq x\leqq x''$, $y'\leqq y\leqq y''$. Désignons par S_R la portion de surface située au-dessus de R. Soient $N_R^{xy}, N_R^{yz}, N_R^{zx}$ les noyaux restreints des projections orthogonales de S_R sur les plans xy yz, zx. Posons[18])

$$\alpha_R[f]=\int_{x'}^{x''}|f(x,y'')-f(x,y')|\,dx,$$

$$\beta_R[f]=\int_{y'}^{y''}|f(x'',y)-f(x',y)|\,dy,\quad \gamma_R=(x''-x')(y''-y'), \tag{14}$$

$$g_R[f]=\Big((\alpha_R[f])^2+(\beta_R[f])^2+(\gamma_R)^2\Big)^{1/2}$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$g_R[f]\leqq L[S_R].^{19)} \tag{15}$$

Considérons N_R^{zx}; nous montrerons d'abord que tout point (x_0,z_0) du plan xz vérifiant les inégalités

$$\big(f(x_0,y'')-z_0\big)\big(f(x_0,y')-z_0\big)<0,\ x'<x_0<x'' \tag{16}$$

appartient à N_R^{zx}. Pour fixer les idées, supposons que

$$f(x_0,y'')-z_0>0,\ f(x_0,y')-z_0<0,$$

donc

$$f(x_0,y'')-z_0>\mu,\ f(x_0,y')-z_0<-\mu,$$

où μ désigne une quantité positive convenablement choisie. La fonction $f(x,y)$ étant continue, nous pouvons déterminer une quantité positive σ, de sorte que

$$f(x,y'')-z_0>\mu,\ f(x,y')-z_0<-\mu,\ \text{pour}\ x_0-\sigma\leqq x\leqq x_0+\sigma.$$

Soit R^* le rectangle du plan xy défini par $x_0-\sigma\leqq x\leqq x_0+\sigma$, $y'\leqq y\leqq y''$, et soit S_{R^*} la portion de surface située au-dessus de R^*. Nous pouvons alors appliquer le résultat du numéro précédent à la projection de S_{R^*} sur le plan zx, en prenant par exemple

$$\xi_1=x_0-\frac{\sigma}{2},\ \xi_2=x_0+\frac{\sigma}{2},\ \eta_1=z_0-\mu,\ \eta_2=z_0+\mu.$$

---

18) Les expressions (14) furent introduites par Geöcze dans sa Thèse, l. c. 8). Dans ses recherches récentes, M. Tonelli s'était servi d'expressions analogues; voir ses Notes aux *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, serie 6a, 3, 1926, pp. 357, 445, 633, 714.

19) Geöcze, l. c. 8) et 14).

Il résulte que tout point du plan zx, contenu dans le rectangle

$$x_0 - \frac{\sigma}{2} < x < x_0 + \frac{\sigma}{2}, \; z_0 - \mu < z < z_0 + \mu$$

(donc, en particulier, le point (x_0, z_0)) appartient au noyau restreint de la projection de S_{R^*}, par conséquent (§ 2, n° 2) aussi au noyau restreint N_R^{zx} de la projection de S_R, puisque la surface S_{R^*} est sous-ensemble de S_R.

Les points (x_0, z_0) du plan xz, vérifiant les inégalités (16), constituent un ensemble ouvert dont la mesure est évidemment égale à

$$\int_{x'}^{x''} |f(x, y'') - f(x, y')|\, dx = \alpha_R[f].$$

Cet ensemble ouvert étant sous-ensemble de N_R^{zx}, nous aurons

$$\alpha_R[f] \leqq m\, N_R^{zx}, \tag{17}$$

et d'une manière analogue

$$\beta_R[f] \leqq m\, N_R^{yz}. \tag{18}$$

Quant à N_R^{xy}, la remarque faite au début du n° 5, § 2 montre immédiatement que ce noyau contient tout point du rectangle ouvert R; par conséquent

$$\gamma_R \leqq m\, N_R^{xy}. \tag{19}$$

Les inégalités (17), (18), (19) fournissent

$$g_R[f] = \left((\alpha_R[f])^2 + (\beta_R[f])^2 + (\gamma_R)^2\right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \left[(m\, N_R^{zx})^2 + (m\, N_R^{yz})^2 + (m\, N_R^{xy})^2\right]^{1/2}.$$

Mais (§ 2, n° 3) le dernier membre est au plus égal à $L[S_R]$; donc $g_R[f] \leqq L[S_R]$, c. qu. f. d.

Soit maintenant D une décomposition du carré Q en rectangles, obtenus à l'aide de droites parallèles aux axes coordonnées. Introduisons la *somme de* Geöcze

$$G_Q[f; D] = \sum g_R[f], \text{[20]} \tag{20}$$

la sommation étant étendue aux divers rectangles de la décomposition D. Nous aurons d'abord, en vertu du résultat précédent, $G_Q[f; D] \leqq \sum L[S_R]$. Les diverses surfaces simples S_R, situées au-dessus des divers rectangles de D, étant sans points communs intérieurs, on aura (§ 1, n° 8)

$$\sum L[S_R] \leqq L[S],$$

donc

$$G_Q[f; D] \leqq L[S]. \tag{21}$$

[20]) Geöcze, l. c. [8]).

Cette inégalité, due à GEÖCZE et retrouvée sous une forme légèrement différente par M. TONELLI,[21]) conduit à des formules générales pour l'aire L que nous développerons au § suivant.

§ 3. Surfaces données par une équation $z = f(x, y)$.

1. Dans la suite, Q désignera le carré fermé $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. La fonction $f(x, y)$ étant continue dans Q, l'équation $z = f(x, y)$ représente une surface simple; en modifiant la notation employée dans le cas général, nous désignerons l'aire de la surface proposée par $L_Q[f]$. Nous nous proposons d'exprimer l'aire $L_Q[f]$ à l'aide de la fonction f.

Nous ferons d'abord quelques remarques évidentes sur les suites convergentes de surfaces du type considéré. Soit $\{h_n\}$ une suite de quantités non-négatives tendant vers zéro, Q_n le carré $h_n \leqq x \leqq 1 - h_n$, $h_n \leqq y \leqq 1 - h_n$, et $f_n(x, y)$ une fonction continue dans Q_n. Le point (x, y) variant dans Q_n, posons

$$\delta_n = \max |f(x, y) - f_n(x, y)|.$$

Si $\delta_n \to 0$, la suite des surfaces $z = f_n(x, y)$ tend, au sens de FRÉCHET, *vers la surface $z = f(x, y)$*. Posons en effet

$$x_n = h_n + (1 - 2h_n)\, x, \quad y_n = h_n + (1 - 2h_n)\, y$$

et faisons correspondre au point $\big(x, y, f(x, y)\big)$ de la surface $z = f(x, y)$ le point $\big(x_n, y_n, f_n(x_n, y_n)\big)$ de la surface $z = f_n(x, y)$. Nous obtenons de la sorte une transformation topologique T_n, dont le module tend vers zéro à cause de $\delta_n \to 0$, $h_n \to 0$; cela signifie que l'écart des surfaces $z = f(x, y)$ et $z = f_n(x, y)$ tend vers zéro.

Considérons en second lieu une suite de fonctions $\{\pi_n(x, y)\}$, continues dans le carré Q et définissant des surfaces polyédriques. Supposons que les sommets de ces surfaces polyédriques soient situés sur la surface $z = f(x, y)$, et que le diamètre maximum des faces du polyèdre $z = \pi_n(x, y)$ tende vers zéro pour $n \to \infty$. Dans ces conditions, la suite des polyèdres $z = \pi_n(x, y)$ tend, au sens de FRÉCHET, vers la surface $z = f(x, y)$. En tenant compte de la continuité uniforme de $f(x, y)$, la démonstration est immédiate.

2. Reprenons les notations du n° 7, § 2 et soit $\Gamma_Q[f]$ la limite supérieure des sommes de GEÖCZE $G_Q[f; D]$ pour toutes

[21]) GEÖCZE, l. c. [8]), [14]); TONELLI, l. c. [18]).

les décompositions D du carré Q. En vertu de l'inégalité fondamentale (21), nous aurons aussi

$$\Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f]. \tag{22}$$

Nous allons montrer qu'il y a toujours égalité: $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$. Nous établirons d'abord ce théorème, et du même coup plusieurs autres, pour le cas particulier où $f(x, y)$ admet des dérivées premières continues dans le carré fermé Q. Pour traîter ce cas simple et important nous nous servirons d'un raisonnement qui a été utilisé par Geöcze dans ses recherches générales[22]). Soit $\{D_n\}$ une suite de décompositions du carré Q en rectangles, telle que le diamètre maximum des rectangles de D_n tend vers zéro. Nous faisons correspondre à chaque rectangle $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$ de D_n deux triangles dans l'espace xyz ayant pour sommets les points

$$\big(x', y', f(x', y')\big),\ \big(x'', y', f(x'', y')\big),\ \big(x'', y'', f(x'', y'')\big),$$

respectivement

$$\big(x', y', f(x', y')\big),\ \big(x', y'', f(x', y'')\big),\ \big(x'', y'', f(x'', y'')\big).$$

Nous obtenons ainsi une surface simple polyédrique $\mathfrak{P}_n$ inscrite dans la surface proposée et représentable par une équation $z = \mathfrak{p}_n(x, y)$, où $\mathfrak{p}_n(x, y)$ est une fonction univoque et continue dans Q et $\mathfrak{p}_n(x, y) \to f(x, y)$ uniformément dans Q. Ces polyèdres $\mathfrak{P}_n$ tendent donc, au sens de Fréchet, vers la surface $z = f(x, y)$; par conséquent

$$\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] \geqq L_Q[f], \tag{23}$$

en désignant, comme toujours, par A l'aire élémentaire.

Soit $G_Q[f; D_n]$ la somme de Geöcze correspondant à D_n. *Supposons que la suite $\{D_n\}$ ait été choisie de manière que l'on ait*

$$G_Q[f; D_n] - A[\mathfrak{P}_n] \to 0. \tag{24}$$

Cette relation fournit les suivantes

$$\underline{\lim}\, G_Q[f; D_n] = \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n],\quad \overline{\lim}\, G_Q[f; D_n] = \overline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n].$$

En tenant compte des inégalités (22), (23), il vient donc

$$\overline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] = \overline{\lim}\, G_Q[f; D_n] \leqq \Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f] \leqq \underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]. \tag{25}$$

Il en résulte, puisque la limite inférieure ne saurait dépasser la limite supérieure, que $\underline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n] = \overline{\lim}\, A[\mathfrak{P}_n]$. Cela signifie que la suite $A[\mathfrak{P}_n]$ est convergente; en vertu de (24) la suite $G_Q[f; D_n]$

[22]) Geöcze, l. c. [8]).

est donc également convergente. Cela étant, (25) fournit, pour $n \to \infty$,

$$L_Q[f] = \Gamma_Q[f] = \lim G_Q[f; D_n] = \lim A[\mathfrak{P}_n], \tag{26}$$

ce qui démontre, entre autres, le théorème $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$.

Dans ce raisonnement, l'hypothèse concernant la continuité des dérivées premières de $f(x, y)$ n'est point intervenue. En effet, ce raisonnement est parfaitement général; pour l'appliquer, il faut seulement construire une suite de décompositions pour laquelle (24) ait lieu. Cette construction représente précisément le point le plus délicat des recherches générales de Geöcze. Dans le cas particulier cependant, où les dérivées premières

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(x, y), \frac{\partial f}{\partial y} = q(x, y)$$

sont continues dans le carré fermé Q, le raisonnement de Geöcze conduit facilement au but. On démontre aisément que dans ce cas *toute* suite $\{D_n\}$ jouit de la propriété (24). En effet, en utilisant les formules élémentaires de la géométrie analytique, on obtient pour l'aire d'un triangle ayant pour sommets les points

$$\left(x', y', f(x', y')\right), \left(x'', y', f(x'', y')\right), \left(x'', y'', f(x'', y'')\right),$$

la formule

$$\frac{1}{2}(x''-x')(y''-y')\left[1+\left(\frac{f(x'',y')-f(x',y')}{x''-x'}\right)^2+\left(\frac{f(x'',y'')-f(x'',y')}{y''-y'}\right)^2\right]^{1/2}.$$

En tenant compte de l'existence et de la continuité uniforme des dérivées premières $p(x, y)$, $q(x, y)$, on transforme d'abord cette expression en la suivante

$$\frac{1}{2}(x''-x')(y''-y')[1+p(\xi, y')^2+q(x'', \eta)^2]^{1/2}, \quad x'<\xi<x'', y'<\eta<y'',$$

de laquelle il résulte immédiatement que l'aire élémentaire $A[\mathfrak{P}_n]$ de $\mathfrak{P}_n$ est une valeur approchée de l'intégrale, au sens de Riemann, de la fonction continue $(1+p^2+q^2)^{1/2}$. Donc

$$A[\mathfrak{P}_n] \to \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy. \tag{27}$$

Quant à $G_Q[f; D_n]$, on observe d'abord que

$$\alpha_R[f] = \int_{x'}^{x''} |f(x, y'') - f(x, y')|\, dx = (x''-x')\,|f(\xi, y'') - f(\xi, y')|,$$

$$\text{où } x' \leqq \xi \leqq x''.$$

La dérivée $q(x, y)$ existant partout, on en tire

$$\alpha_R[f] = (x''-x')(y''-y')\,|q(\xi, \eta)|, \quad \text{où } y' < \eta < y''.$$

En raisonnant de même sur $\beta_B[f]$, et en tenant compte de la continuité uniforme des dérivées $p(x, y)$, $q(x, y)$ on reconnaît finalement que $G_Q[f; D_n]$ est aussi une valeur approchée de l'intégrale $\iint\limits_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy$. Donc

$$G_Q[f; D_n] \to \iint\limits_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy. \tag{28}$$

Les suites $G_Q[f; D_n]$ et $A[\mathfrak{P}_n]$ tendant vers la même limite, la relation (24) est certainement vérifiée; nous pouvons donc écrire, en vertu de (26) et en tenant compte de (27), (28),

$$\begin{aligned} L_Q[f] = \Gamma_Q[f] = \iint\limits_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy = \\ = \lim G_Q[f; D_n] = \lim A[\mathfrak{P}_n]. \end{aligned} \tag{29}$$

Cette formule contient plusieurs théorèmes qu'il y a lieu de formuler.

3. La formule obtenue montre d'abord que l'on a, si $f(x, y)$ admet des dérivées premières continues,

$$L_Q[f] = \iint\limits_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy.$$

C'est la formule classique pour l'aire. Au cours de ses recherches importantes, M. Tonelli[23]) a établi les propriétés de $f(x, y)$ qui sont nécessaires et suffisantes pour la validité de cette formule; à présent, nous voulons seulement insister sur ce fait négatif que l'intégrale double peut avoir un sens sans représenter l'aire de la surface. Il y a lieu de préciser ce fait. Considérons le cas où $f(x, y)$ est indépendante de y; la surface $z = f(x, y) = f(x)$ est alors une portion d'une surface cylindrique, limitée par deux génératrices et deux sections normales. Si h désigne la longueur des génératrices, l la longueur des sections normales, les considérations utilisées en géométrie élémentaire pour calculer l'aire des surfaces cylindriques conduisent à attribuer à l'*aire intuitive* d'une telle portion de surface la valeur hl. Puisque $f(x, y)$ est définie dans $Q: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, on a $h = 1$, tandis que l est égale à la longueur de la courbe $y = 0$, $z = f(x)$. Observons d'abord que dans le cas actuel $L_Q[f]$ fournit bien la valeur $1 \times l = l$ de l'aire intuitive. Soit en effet D une décomposition de Q en rectangles, obtenus à l'aide des valeurs

$$x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_m = 1, \quad y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots < y_n = 1.$$

[23]) Tonelli, l. c. [18]).

On aura, en tenant compte du fait que $f(x, y)$ ne dépend pas de y, pour la somme de Geöcze correspondante

$$G_Q[f; D] = \sum_{j=0}^{m-1} [(x_{j+1} - x_j)^2 + (f(x_{j+1}) - f(x_j))^2]^{1/2}.$$

En faisant tendre le diamètre maximum des rectangles de D vers zéro, le second membre tend vers l; quant à $G_Q[f; D]$, nous verrons plus loin (§ 3, n° 8) qu'elle tend toujours vers $L_Q[f]$. Donc, dans le cas où $f(x, y)$ est indépendante de y, $L_Q[f]$ est égale à l'aire intuitive.

Passons à l'intégrale double, en supposant qu'elle ait un sens. On aura $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ identiquement, et $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x)$, pour toute valeur de x où $f'(x)$ existe. Donc

$$\iint_{(Q)} (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\, dx\, dy = \int_0^1 (1 + f'(x)^2)^{1/2}\, dx.$$

En choisissant pour $f(x)$ la fonction monotone bien connue pour laquelle $f'(x) = 0$ presque partout, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,[24]) l sera finie et l'on aura évidemment $l \geqq \sqrt{2}$, puisque la longueur d'un arc de courbe est au moins égale à la distance de ses extrémités. D'autre part, puisque $f'(x) = 0$ presque partout, l'intégrale double fournit la valeur 1, inférieure à l'aire intuitive.

On voit donc qu'il y a des cas où $L_Q[f]$ et l'intégrale double fournissent des valeurs différentes et où l'on peut constater que c'est $L_Q[f]$ qui est égale à l'aire intuitive.

4. La formule (29) contient encore le théorème que pour toute suite de surfaces polyédriques inscrites construites à l'aide de décompositions rectangulaires du carré Q (j'entends par là la construction employée au n° 2, § 3), les aires élémentaires tendent vers l'aire de la surface, pourvu que $f(x, y)$ possède des dérivées premières continues. Dans le cas général, on ne sait même pas s'il existe une seule suite de surfaces polyédriques jouissant de ces propriétés; au cours de ses recherches, Geöcze fut amené à énoncer l'avis que dans le cas général il n'en existe aucune.[25]) L'étude approfondie de cette question pourrait conduire

---

[24]) Cf. par ex. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, p. 13.

[25]) Geöcze, Contributions à la quadrature de la surface $z = f(x, y)$ (en hongrois), *Mathematikai és természettudományi értesitő* **26**, 1908, pp. 475—512, en particulier p. 512.

à des résultats importants concernant *le problème de la quadrature* au sens de GEÖCZE; il entend par là le problème de construire, par un procédé régulier, une suite de surfaces polyédriques, tendant vers la surface proposée, dont les aires élémentaires tendent précisément vers l'aire de celle-ci.

5. Considérons en dernier lieu les théorèmes

$$L_Q[f] = \Gamma_Q[f] = \lim G_Q[f; D_n], \tag{30}$$

contenus dans la formule (29) pour le cas où $f(x, y)$ possède des dérivées premières continues. GEÖCZE a énoncé ces théorèmes pour le cas général où $f(x, y)$ est soumise à la seule restriction d'être continue; il n'a cependant donné la démonstration que pour le cas où $f(x, y)$ satisfait à une condition de LIPSCHITZ, en se servant du raisonnement que nous avons exposé plus haut (n° 2, § 3).[26]) Ce raisonnement fournit, toutes les fois que l'on sache l'appliquer, une suite de polyèdres inscrits, construits à l'aide de décompositions rectangulaires, dont les aires élémentaires tendent précisément vers l'aire de la surface $z = f(x, y)$. L'existence d'une telle suite constitue donc une condition nécessaire pour que le raisonnement de GEÖCZE s'applique; il a été observé au numéro précédent que l'on ne sait pas si cette condition est remplie dans le cas général.

La formule (30) résulte, pour un cas beaucoup plus général que celui envisagé par GEÖCZE, des recherches récentes de M. TONELLI. En vertu des résultats de M. TONELLI, on a toujours

$$\iint_{(Q)} (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\, dx\, dy \leqq \Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f].$$

Il en résulte $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$ pour le cas où l'aire $L_Q[f]$ est égale à l'intégrale double classique; ceci aura lieu, d'après M. TONELLI, si $f(x, y)$ est absolument continue et seulement dans ce cas.[27])

6. Pour démontrer la formule (30) dans le cas général où $f(x, y)$ est soumise à la seule restriction d'être continue, nous utiliserons la méthode qui a déjà été esquissée au § 1, n° 5. Nous nous servirons donc de surfaces d'approximation dont les aires restent inférieures à l'aire de la surface proposée.[28])

---

[26]) GEÖCZE, l. c. [8]); voir aussi *Mathematikai és Physikai Lapok* **20**, 1911, pp. 255—301.

[27]) TONELLI, l. c. [18]).

[28]) Voir mes Notes: Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes, C. R. t. 183, 11 octobre 1926; Sur l'aire des surfaces courbes, *ibid.*, t. 184, 10 janvier 1927; Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes, *Fundamenta Mathematicae*, t. X, pp. 197—210.

Supposons que nous ayons démontré, pour toute valeur positive assez petite de h, l'existence d'une fonction $f_h(x, y)$ jouissant des propriétés suivantes.

a) $f(x, y)$ est définie et continue, ainsi que ses dérivées premières, dans le carré fermé Q_h: $h \leqq x \leqq 1-h, h \leqq y \leqq 1-h$.

b) La limite supérieure $\Gamma_{Q_h}[f_h]$ des sommes de Geöcze relatives à la fonction $f_h(x, y)$ et au carré Q_h ne dépasse pas la limite supérieure $\Gamma_Q[f]$ des sommes de Geöcze relatives à la fonction $f(x, y)$ et au carré Q.

c) Pour $h \to 0$, les surfaces $z = f_h(x, y)$ tendent, au sens de Fréchet, vers la surface proposée $z = f(x, y)$.

Admettons l'existence de ces fonctions $f_h(x, y)$; le théorème $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$ est alors immédiat. En effet, $f_h(x, y)$ admettant des dérivées premières continues dans Q_h, nous aurons (§ 3, n° 2)

$$\Gamma_{Q_h}[f_h] = L_{Q_h}[f_h].$$

Donc, en vertu de *b)* et de l'inégalité fondamentale (22),

$$L_{Q_h}[f_h] \leqq \Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f]. \tag{31}$$

Les surfaces $z = f_h(x, y)$ possèdent donc des aires au plus égales à l'aire de $z = f(x, y)$; en outre, ces surfaces tendent, en vertu de l'hypothèse *c)*, vers $z = f(x, y)$. Il en résulte (§ 1, n° 5)

$$L_Q[f] = \lim_{h \to 0} L_{Q_h}[f_h]. \tag{32}$$

Dès lors, la formule $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$ résulte immédiatement de (31) en y faisant tendre h vers zéro.

Tout revient donc à démontrer l'existence des fonctions $f_h(x, y)$. Nous y arriverons, guidés par cette observation pratique que l'on diminue l'aire d'une surface en rendant son allure plus uniforme, en nivellant la surface proposée par le procédé classique des moyennes arithmétiques. Introduisons les *surfaces moyennes* $z = f_h(x, y)$ par la formule

$$f_h(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{33}$$
$$(h \leqq x \leqq 1-h,\ h \leqq y \leqq 1-h)$$

Cette fonction $f_h(x, y)$ est définie et continue dans le carré fermé Q_h. Pour obtenir ses dérivées premières, observons que l'on peut écrire, en tenant compte de la continuité de $f(x, y)$,

$$f_h(x+\Delta x, y) - f_h(x, y) =$$

$$= \frac{1}{4h^2}\left[\int_{x+h}^{x+h+\Delta x} du \int_{-h}^{h} f(u, y+\eta)\, d\eta - \int_{x-h}^{x-h+\Delta x} du \int_{-h}^{h} f(u, y+\eta)\, d\eta\right] =$$

$$= \frac{\Delta x}{4h^2}\left[\int_{-h}^{h} f(u', y+\eta)\, d\eta - \int_{-h}^{h} f(u'', y+\eta)\, d\eta\right],$$

où

$$x+h \leqq u' \leqq x+h+\Delta x, \quad x-h \leqq u'' \leqq x-h+\Delta x.$$

Pour $\Delta x \to 0$, on a donc $u' \to x+h$, $u'' \to x-h$; par conséquent

$$\frac{\partial f_h}{\partial x} = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\Big[f(x+h, y+\eta) - f(x-h, y+\eta)\Big]\, d\eta, \tag{34}$$

et d'une manière analogue

$$\frac{\partial f_h}{\partial y} = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\Big[f(x+\xi, y+h) - f(x+\xi, y-h)\Big]\, d\xi. \tag{35}$$

Ces formules montrent que les dérivées premières de $f_h(x, y)$ sont continues dans Q_h; l'hypothèse *a)* est vérifiée. Quant à l'hypothèse *c)*, on obtient de (33), en désignant par $\omega(\lambda)$ le maximum de $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|$ pour tout couple de points dans Q dont la distance ne dépasse pas λ,

$$|f_h(x, y) - f(x, y)| \leqq \omega(h\sqrt{2}) \text{ pour } (x, y) \text{ dans } Q_h.$$

Puisque $f(x, y)$ est uniformément continue, $\omega(h\sqrt{2}) \to 0$ pour $h \to 0$, donc (§ 3, n° 1) les surfaces $z = f_h(x, y)$ tendent au sens de Fréchet vers la surface $z = f(x, y)$. Passons à l'hypothèse *b)*. Soit $R: x' \leqq x \leqq x'', \ y' \leqq y \leqq y''$ un rectangle contenu dans Q_h. La formule (33) fournit immédiatement l'inégalité

$$|f_h(x, y'') - f_h(x, y')| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |f(x+\xi, y''+\eta) - f(x+\xi, y'+\eta)|\, d\xi\, d\eta.$$

En intégrant de x' à x'' et en intervertissant l'ordre des intégrations (ce qui est évidemment permis puisque f est continue), nous obtenons (*cf.* (14))

$$a_R[f_h] \leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} d\xi\, d\eta \int_{x'}^{x''} |f(x+\xi, y''+\eta) - f(x+\xi, y'+\eta)|\, dx. \tag{36}$$

Soit $R_{\xi\eta}$ le rectangle provenant de R par la translation $\bar{x}=x+\xi$, $\bar{y}=y+\eta$. Évidemment

$$\alpha_{R_{\xi\eta}}[f]=\int_{x'}^{x''}|f(x+\xi, y''+\eta)-f(x+\xi, y'+\eta)|\,dx,$$

de sorte que (36) exprime que

$$\alpha_R[f_h]\leqq\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\alpha_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta. \tag{37}$$

On obtient de même

$$\beta_R[f_h]\leqq\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\beta_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta. \tag{38}$$

Les rectangles R et $R_{\xi\eta}$ étant congruents, on a en outre

$$\gamma_R=\gamma_{R_{\xi\eta}}=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\gamma_{R_{\xi\eta}}\,d\xi\,d\eta. \tag{39}$$

Il vient donc de (37), (38), (39), en tenant compte de (14),

$$g_R[f_h]\leqq\frac{1}{4h^2}\left[\left(\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\alpha_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\beta_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta\right)^2+\left(\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\gamma_{R_{\xi\eta}}\,d\xi\,d\eta\right)^2\right]^{1/2}. \tag{40}$$

Or, en désignant par φ, ψ, χ trois fonctions intégrables dans un même domaine Δ d'un nombre quelconque de dimensions, on a l'inégalité bien connue, conséquence immédiate de l'inégalité élémentaire (9),

$$\left[\left(\int_\Delta\varphi\right)^2+\left(\int_\Delta\psi\right)^2+\left(\int_\Delta\chi\right)^2\right]^{1/2}\leqq\int_\Delta(\varphi^2+\psi^2+\chi^2)^{1/2}$$

En l'appliquant au second membre de (40), il vient, en vertu de (14),

$$g_R[f_h]\leqq\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}g_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta. \tag{41}$$

En écrivant (41) pour chacun des rectangles d'une décomposition $D^{(h)}$ du carré Q_h, on obtient par sommation

$$G_{Q_h}[f_h; D^{(h)}]\leqq\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\left(\sum g_{R_{\xi\eta}}[f]\right)d\xi\,d\eta. \tag{42}$$

La somme $\sum g_{R_{\xi\eta}}[f]$ a une signification évidente: c'est une somme de Geöcze relative à la fonction $f(x, y)$ et au carré provenant de Q_h par la translation $\bar{x} = x + \xi$, $\bar{y} = y + \eta$. Le carré ainsi obtenu étant contenu dans le carré Q, la somme en question sera a fortiori au plus égale à la limite supérieure $\Gamma_Q[f]$ des sommes de Geöcze relatives à f et au carré Q. L'inégalité (42) fournit donc

$$G_{Q_h}[f_h; D^{(h)}] \leqq \frac{\Gamma_Q[f]}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} d\xi\, d\eta = \Gamma_Q[f].$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute décomposition $D^{(h)}$ du carré Q_h, on en conclut $\Gamma_{Q_h}[f_h] \leqq \Gamma_Q[f]$, c. qu. f. d.

Le théorème $L_Q[f] = \Gamma_Q[f]$ est ainsi complètement démontré. En outre, puisque les fonctions $f_h(x, y)$ possèdent les propriétés *a)*, *b)*, *c)*, la formule (32) s'applique et conduit à une expression explicite pour l'aire $L_Q[f]$. En effet, $f_h(x, y)$ admettant des dérivées premières continues dans Q_h, on a (§ 3, n° 3)

$$L_{Q_h}[f_h] = \iint_{(Q_h)} \left[1 + \left(\frac{\partial f_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_h}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy,$$

donc, en vertu de (32) et en tenant compte des formules (34), (35),

$$L_Q[f] = \lim_{h \to 0} \int_h^{1-h} \int_h^{1-h} \left[1 + \left(\frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} (f(x+h, y+\eta) - f(x-h, y+\eta))\, d\eta\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} (f(x+\xi, y+h) - f(x+\xi, y-h))\, d\xi\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy. \qquad (42')$$

Rappelons que nous avons obtenu ces résultats sous la seule hypothèse de la continuité de $f(x, y)$; nous n'avons même pas supposé que l'aire $L_Q[f]$ soit finie.[29])

7. On voit que les résultats précédents sont des conséquences immédiates du fait que les aires des surfaces moyennes sont au

[29]) En complétant les résultats contenus dans ses Notes l. c. [18]), M. Tonelli vient d'annoncer que les polynomes de Stieltjes qu'il a utilisés l. c. [18]) fournissent des surfaces d'approximation dont les aires tendent vers l'aire de la surface proposée, si l'aire de celle-ci est finie (voir la relation sur la réunion à Bologne au *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, Anno 5, n° 5, p. 253). Ce résultat fournit pour l'aire une expression analogue à (42'). Dans la théorie de la longueur des courbes, les polynomes de Stieltjes à une seule variable jouent un rôle analogue; voir Tonelli, Sopra alcuni polinomi approssimativi, *Annali di Matematica*, t. XXV, 1916.

plus égales à l'aire de la surface primitive. On peut rattacher cette propriété des surfaces moyennes à un fait géométrique classique. Soient $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$ deux surfaces définies dans une même région du plan xy; la surface

$$z=f(x,y)=\frac{1}{2}\left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right)$$

possède, d'après STEINER, une aire au plus égale à la moyenne arithmétique des aires des surfaces $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$.[30]) Par égard à la formule (33), l'inégalité relative aux aires des surfaces moyennes $z=f_h(x,y)$ peut donc être considérée comme une généralisation de ce théorème de STEINER.[31])

Il y a lieu d'observer que STEINER énonce son théorème mentionné sans préciser la notion de l'aire et la généralité des surfaces dont il s'agit. Nous pouvons constater aisément que le théorème de STEINER tient pour l'aire L sous la seule hypothèse de la continuité des surfaces considérées. Soient

$$f_1(x,y), f_2(x,y), f(x,y)=\frac{1}{2}\left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right)$$

des fonctions continues dans le carré Q. En tenant compte de l'inégalité élémentaire (9), indiquée au § 2, n° 1, il résulte immédiatement des formules de définition (14), (20) que

$$G_Q[f;D]\leqq\frac{1}{2}(G_Q[f_1;D]+G_Q[f_2;D])$$

pour toute décomposition D de Q. Par conséquent, en vertu de l'inégalité fondamentale (21),

$$G_Q[f;D]\leqq\frac{1}{2}(L_Q[f_1]+L_Q[f_2]).$$

Cette inégalité étant vérifiée pour toute décomposition D, on aura aussi

$$L_Q[f]\leqq\frac{1}{2}(L_Q[f_1]+L_Q[f_2]),$$

puisque $L_Q[f]$ est égale, comme nous l'avons démontré, à la limite

---

30) J. STEINER, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 298.

31) La longueur des courbes donne lieu à des généralisations analogues. Cf. PÓLYA-SZEGŐ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, zweiter Abschnitt, problèmes 87, 88; voir en particulier le beau théorème de F. LUKÁCS concernant les moyennes arithmétiques des séries de FOURIER, *ibid.*, p. 213.

supérieure des sommes de GEÖCZE. Un raisonnement analogue s'applique évidemment à un nombre quelconque de surfaces.

8. Nous allons compléter la formule $L_Q[f]=\Gamma_Q[f]$ par le théorème suivant, fournissant pour l'aire $L_Q[f]$ une méthode de calcul analogue à celle qui sert de définition pour la longueur des courbes.

Soit $\{D_n\}$ une suite de décompositions du carré Q, telles que le diamètre maximum des rectangles de D_n tend vers zéro. On aura

$$L_Q[f]=\lim_{n\to\infty} G_Q[f;D_n]. \tag{42''}$$

Puisque nous savons déjà que $L_Q[f]=\Gamma_Q[f]$, il s'agit de démontrer le fait purement analytique que toute suite de sommes de GEÖCZE tend vers la limite supérieure de ces sommes, pourvu que le diamètre maximum des rectangles des décompositions utilisées tende vers zéro. Ce fait résulte comme corollaire immédiat de certains résultats de M. TONELLI, concernant les sommes d'une structure analogue qu'il a introduites au cours de ses recherches; nous n'aurons donc qu'à reproduire presque textuellement le raisonnement de M. TONELLI.[32])

Nous aurons à traîter séparément le cas où $L_Q[f]$ est infinie; commençons donc par une condition nécessaire et suffisante pour que $L_Q[f]$ soit finie. Soit $V_{(y)}(x)$ la variation totale de la fonction $f(x,y)$, considérée comme fonction de y seule, dans l'intervalle $0\leqq y\leqq 1$; nous définissons d'une manière analogue la fonction $V_{(x)}(y)$. La mesurabilité des fonctions $V_{(x)}(y)$, $V_{(y)}(x)$ sera établie plus bas; ce point admis, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'aire $L_Q[f]$ soit finie consiste en la sommabilité des fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ dans les intervalles de définition $0\leqq x\leqq 1$ respectivement $0\leqq y\leqq 1$.*[33])

Pour démontrer ce théorème, considérons une décomposition obtenue à l'aide des valeurs

$$x_0=0<x_1<\ldots<x_j<\ldots<x_m=1,\quad y_0=0<y_1<\ldots<y_k<\ldots<y_n=1.$$

Introduisons les fonctions auxiliaires, continues dans les intervalles $0\leqq x\leqq 1$, resp. $0\leqq y\leqq 1$,

---

[32]) TONELLI, l. c. [18])

[33]) Aux notations près, le théorème se trouve chez GEÖCZE, l. c. [8]) et dans son travail: Sur la condition nécessaire et suffisante etc. (en hongrois), *Math. és Phys. Lapok* **25**, 19 6, pp. 61—81. Le théorème fut retrouvé par M. TONELLI; voir l. c. [18]).

$$\begin{aligned} v_{(y)}(x; D) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x, y_{k+1}) - f(x, y_k)|, \\ v_{(x)}(y; D) &= \sum_{j=0}^{m-1} |f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)|. \end{aligned} \tag{43}$$

On obtient, en tenant compte des formules (14),

$$\int_0^1 v_{(y)}(x; D)\,dx = \sum \alpha_R[f], \int_0^1 v_{(x)}(y; D)\,dy = \sum \beta_R[f], \tag{44}$$

la sommation étant étendue aux rectangles de D. En faisant tendre le diamètre maximum des rectangles de D vers zéro, on a évidemment

$$\lim v_{(y)}(x; D) = V_{(y)}(x), \ \lim v_{(x)}(y; D) = V_{(x)}(y), \tag{45}$$

les fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ sont donc mesurables. Ceci posé, supposons seulement qu'il existe une suite de décompositions $\{D_n\}$, le diamètre maximum des rectangles de D_n tendant vers zéro, et telles que

$$G_Q[f; D_n] < M, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

où M désigne une quantité finie. Moyennant les inégalités

$$\sum \alpha_R[f], \sum \beta_R[f] \leqq \sum g_R[f] = G_Q[f; D]$$

nous obtenons des formules (44), (46)

$$\int_0^1 v_{(y)}(x; D_n)\,dx, \int_0^1 v_{(x)}(y; D_n)\,dy < M. \tag{47}$$

En vertu d'un lemme important de Fatou, concernant les suites de fonctions non-négatives, il résulte de (45), (47) que les fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ sont sommables. L'hypothèse (46) est certainement vérifiée, par égard à l'inégalité fondamentale (21), si l'aire $L_Q[f]$ est finie; nous avons donc démontré que la sommabilité des fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ est une condition nécessaire pour que $L_Q[f]$ soit finie.

Supposons en second lieu la sommabilité de $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$. Évidemment

$$v_{(y)}(x; D) \leqq V_{(y)}(x), \ v_{(x)}(y; D) \leqq V_{(x)}(y), \tag{48}$$

donc, en vertu de (44),

$$\sum \alpha_R[f] \leqq \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx, \ \sum \beta_R[f] \leqq \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy.$$

Il en résulte, puisque $g_R[f] \leqq \alpha_R[f] + \beta_R[f] + \gamma_R$, pour toute décomposition D

$$G_Q[f;D] = \sum g_R[f] \leqq \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx + \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy + 1.$$

Puisque $L_Q[f]$ est égale à la limite supérieure des sommes de Geöcze, on aura aussi

$$L_Q[f] \leqq \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx + \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy + 1.$$

L'aire $L_Q[f]$ est donc finie, si $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ sont sommables.

9. Passons à la démonstration de la formule (42″) en supposant d'abord que $L_Q\,[f] = +\infty$. Si le théorème n'était pas vrai en ce cas, on aurait pour une certaine suite $\{D_n\}$

$$G_Q\,[f;D_n] < M,$$

la constante M étant finie. En tenant compte des résultats du numéro précédent, cette inégalité conduit à une contradiction avec l'hypothèse $L_Q\,[f] = +\infty$. En effet, cette inégalité entraîne la sommabilité des fonctions $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$, et la sommabilité de $V_{(y)}(x)$, $V_{(x)}(y)$ est une condition suffisante pour que $L_Q\,[f]$ soit finie.

Supposons en second lieu que $L_Q\,[f]$ soit finie. En ce cas, on arrive au but à l'aide d'un lemme, concernant les fonctions de rectangle, que nous allons d'abord formuler. Soit $\psi(R)$ une fonction de rectangle, définie pour tout rectangle contenu dans Q et jouissant des propriétés suivantes.

a) On a toujours $\psi(R) \geqq 0$.

b) En décomposant un rectangle R, par une droite parallèle à l'une des axes x, y, en deux rectangles R_1, R_2, on a

$$\psi(R) \leqq \psi(R_1) + \psi(R_2).$$

Pour énoncer la troisième propriété, soient

$$y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots < y_n = 1$$

des points de division sur l'axe des y, et $x', x'' > x'$ deux points sur l'axe des x. Nous dirons que les rectangles

$$R_k\colon x' \leqq x \leqq x'',\ y_k \leqq y \leqq y_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (49)$$

constituent une bande verticale de largeur $x'' - x'$; les bandes horizontales se définissent d'une manière analogue. Voilà maintenant la troisième propriété de $\psi(R)$.

c) À tout nombre $\varepsilon > 0$ il correspond un $\delta > 0$, de sorte que $\psi(R_0) + \psi(R_1) + \ldots + \psi(R_{n-1}) < \varepsilon$, pourvu que les rectangles $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ constituent une bande de largeur moindre que δ.

L e m m e. Soit $\psi(R)$ une fonction de rectangle jouissant des propriétés *a*), *b*), *c*). En désignant par D une décomposition de Q

en rectangles, posons $\Psi(D) = \sum \psi(R)$, la sommation étant étendue à tous les rectangles de D. Soit enfin Ψ la limite supérieure des sommes $\Psi(D)$. *On aura dans ces conditions* $\Psi(D_n) \to \Psi$, *pour toute suite* $\{D_n\}$ *telle que le diamètre maximum des rectangles de* D_n *tend vers zéro.*

On démontre ce lemme par un raisonnement familier. absolument analogue à celui dont on se sert pour prouver le théorème de Darboux concernant les intégrales par défaut et par excès; nous n'insistons pas sur les détails.[34])

En tenant compte du lemme que nous venons de formuler, (42″) sera démontré si nous constatons que la fonction de rectangle $g_R[f]$, définie par les formules (14), jouit des propriétés *a*), *b*), *c*). Les propriétés *a*) et *b*) se déduisent immédiatement de la définition de $g_R[f]$. Pour vérifier *c*), considérons par ex. une bande verticale comprenant les rectangles (49). Nous aurons, en tenant compte des formules (14), (44), (48),

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_{R_k}[f] \leq \int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\, dx + \int_0^1 |f(x'', y) - f(x', y)|\, dy + x'' - x'. \tag{50}$$

Or. $\int_0^1 |f(x'', y) - f(x', y)|\, dy$ tend uniformément vers zéro pour $x'' - x' \to 0$, puisque f est continue. En second lieu $\int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\, dx$ tend uniformément vers zéro pour $x'' - x' \to 0$, puisque $V_{(y)}(x)$ est sommable en vertu de l'hypothèse que $L_Q[f]$ est finie (§ 3, n° 8). Le second membre de l'inégalité (50) tend donc uniformément vers zéro pour $x'' - x' \to 0$, par conséquent le premier membre aussi, c. qu. f. d.

10. Dans tout ce paragraphe, nous avons supposé que la fonction $f(x, y)$ est donnée dans un carré. Cette restriction n'est pas essentielle; les résultats obtenus s'étendent facilement au cas où $f(x, y)$ est donnée dans une région $\mathfrak{M}$ limitée par une courbe C simple et fermée quelconque. Soit en effet S la surface simple $z = f(x, y)$, et soit $\mathfrak{M}^*$ une région simplement connexe, intérieure à $\mathfrak{M}$, et limitée par une ligne polygonale composée de segments parallèles aux axes x et y. En désignant par S^* la portion de surface située au-dessus de $\mathfrak{M}^*$, les considérations des numéros

[34]) Le lecteur les trouvera dans le livre de M. Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni, vol. I, p. 37.

précédents s'appliquent évidemment au calcul de l'aire de S^*. Or, l'aire de S^* est inférieure à l'aire de S; donc, en faisant tendre S^* vers S, l'aire de S^* tendra vers l'aire de S. On voit donc que le cas d'une courbe frontièré générale du domaine dans lequel $f(x, y)$ est définie se ramène au cas où cette courbe frontière est composée par un nombre fini de segments parallèles aux axes x, y, c'est-à-dire à un cas où les développements précédents s'appliquent avec des modifications insignifiantes. En laissant au lecteur le soin de développer quelques détails n'offrant aucune difficulté, nous nous bornons à énoncer le résultat final. Soit $\mathfrak{M}$ une région simplement connexe du plan xy, limitée par une courbe fermée de JORDAN, et soit $f(x, y)$ une fonction uniforme et continue dans $\mathfrak{M}$. Pour tout rectangle R: $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$, tel que tout point intérieur de R soit aussi point intérieur de $\mathfrak{M}$, on définit les expressions $\alpha_R[f]$, $\beta_R[f]$, γ_R, $g_R[f]$ par les formules (14). Soit alors D une décomposition en rectangles du plan xy, et soit

$$G_{\mathfrak{M}}[f; D] = \sum{}' g_R[f],$$

la notation $\sum'$ indiquant que la sommation doit être étendue à ceux des rectangles de D dont tous les points intérieurs sont aussi intérieurs à $\mathfrak{M}$. Soit encore $L_{\mathfrak{M}}[f]$ l'aire de la surface simple $z = f(x, y)$. *On aura*

$$G_{\mathfrak{M}}[f; D_n] \to L_{\mathfrak{M}}[f],$$

pour toute suite $\{D_n\}$, *telle que le diamètre maximum des rectangles de* D_n *tend vers zéro.*

Szeged, avril 1927.

(Reçu le 10. avril 1927).

Sur l'aire des surfaces $z=f(x,y)$.

Par S. Saks à Varsovie (Pologne).

1. En complétant et précisant en certains points les recherches récentes de M. Tonelli[1]) sur la quadrature des surfaces, M. Radó[2]) a prouvé que l'aire d'une surface continue quelconque, donnée sous la forme $z=f(x,y)$, peut être toujours déterminée comme limite de certaines expressions d'une nature assez simple, considérées déjà par le regretté géomètre hongrois Zoárd de Geöcze. Le résultat de M. Radó gagne encore d'intérêt si l'on l'énonce en termes de la théorie générale des fonctions d'intervalle.

2. Pour la commodité du lecteur, je vais rappeler brièvement quelques notions et théorèmes de cette théorie.[3])

$g(R)$ étant une fonction du rectangle R (on sousentendra toujours que les côtés des rectangles sont parallèles aux axes des coordonnées), on désigne par $\overline{g}(p)=\overline{g}(x,y)$, resp. $\underline{g}(p)=\underline{g}(x,y)$, en un point $p=(x,y)$, les deux limites d'indétermination, supérieure et inférieure, du quotient $g(K):m(K)$, K désignant un carré quelconque contenant le point p et tendant vers zéro. La fonction $g(R)$ est *dérivable* au point p, lorsque $\overline{g}(p)=\underline{g}(p)$; on écrit alors $\overline{g}(p)=\underline{g}(p)=g'(p)=g'(x,y)$, $g'(p)$ s'appelant la *dérivée* de $g(R)$ en p.

---

1) L. Tonelli, *C. R.* 1926, t. 182, p. 1198; *Rend. Acad. Linc.* 1926, vol. III, 6e Série, 1o sem., fasc. 7, 8, 11.

2) T. Radó, *C. R.* 1926, t. 183, p. 588; Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes, *Fund. Math.*, t. X, pp. 197—210. (*Voir* aussi l'article précédent.)

3) Voir: S. Saks, Sur les fonctions d'intervalle, *Fund. Math.*, t. X, pp. 211—224., où les notions rappelées dans le texte sont traitées sous un aspect plus général; aussi: St. Banach, Sur une classe de fonctions d'ensemble, *Fund. Math.*, t. VI, pp. 170—188.

La fonction $g(R)$ est *intégrable* (Burkill) dans un rectangle R^0, lorsque $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ étant une subdivision quelconque de R^0 en un nombre fini de rectangles n'empiétant pas, la somme $\sum_{k=1}^{n} g(R_k)$ tend vers une limite finie et unique, lorsque les diamètres des R_k tendent uniformément vers zéro. Cette limite est appelée *l'intégrale* de $g(R)$ dans R^0 et se désigne par $\int_{R^0} g(R)$.

L'intégrale $G(R)=\int_{R} g(R)$ d'une fonction intégrable est encore une fonction d'intervalle, évidemment *additive*.

Une fonction $g(R)$ est *absolument continue* lorsque pour chaque système d'intervalles $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ n'empiétant pas, la somme $\sum_{k=1}^{n} g(R_k)$ tend vers zéro avec $m\left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right)$.

Lorsqu'une fonction intégrable $g(R)$ est absolument continue, son intégrale l'est aussi.

Lorsqu'une fonction $g(R)$ est intégrable et $G(R)$ est son intégrale, on a en presque tout point p:

$$\overline{g}(p)=\overline{G}(p), \quad \underline{g}(p)=\underline{G}(p);$$

en particulier, lorsque l'une des deux fonctions $g(R)$, $G(R)$ est presque partout dérivable, il en est de même de l'autre et l'on a presque partout: $g'(p)=G'(p)$.

3. Soit maintenant $z=f(x, y)$ une fonction continue dans le carré $K_0=(0, 0;\ 1, 1)$. Posons, en modifiant légèrement les notations de M. Radó, pour chaque rectangle $R=(x', y';\ x'', y'')$ contenu dans K_0:

$$\alpha(R; f)=\int_{x'}^{x''} |f(x, y'')-f(x, y')|\, dx, \quad \beta(R; f)=\int_{y'}^{y''} |f(x'', y)-f(x', y)|\, dy$$

$$\sigma(R; f)=\sqrt{\alpha^2(R; f)+\beta^2(R; f)+m^2(R)}.$$

Les trois fonctions ainsi déterminées sont non-négatives. L'intégrabilité de σ équivaut à l'intégrabilité simultanée de α et de β. D'autre part, l'intégrabilité de la fonction $\alpha(R; f)$ équivaut à la condition que $f(x, y)$ soit, sur presque chaque droite $x=const.$, à variation bornée (relativement à y) et que l'intégrale $\int_0^1 V_{(y)}(x, 1)\, dx$[4],

[4]) Notation de M. Tonelli (l. c. [1])): $V_{(y)}(\xi, \eta)$ désigne la variation totale dans l'intervalle $(0, \eta)$ de $f(\xi, y)$ considérée comme fonction de la seule variable y; le sens analogue est attribué au symbole $V_{(x)}(\xi, \eta)$.

soit finie ; on a aussi

$$\int_R \alpha(R;f) = \alpha(R;V_{(y)}).$$

Les relations analogues subsistent évidemment pour $\beta(R;f)$. L'intégrabilité de $\sigma(R;f)$ équivaut ainsi à la condition que la fonction $f(x,y)$ soit *à variation bornée* au sens de M. Tonelli. Donc[5]) : *pour qu'une surface continue* $z=f(x,y)$, *définie dans le carré* K_0, *admette une aire finie* (au sens de Lebesgue), *il faut et il suffit que la fonction de rectangle* $\sigma(R;f)$ *soit intégrable dans* K_0. Dans la suite, nous considérons le cas où l'aire est finie. Le théorème mentionné plus haut de M. Radó s'énonce alors : *l'aire de la surface est égale à* $\int_{K_0} \sigma(R;f)$.

4. Le but de la note présente est de prouver une relation élémentaire, rentrant dans le même ordre d'idées et que j'ai signalée déjà dans une note des *C. R.* (t. 183, p. 850) ; notamment, que $z=f(x,y)$ *étant une surface continue à l'aire finie, on a en presque tout point* (x,y)

$$\lim \left[\frac{S(K)}{m(K)}\right]^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2,$$

K désignant un carré quelconque contenant le point (x,y) *et tendant vers zéro, et* $S(K)$ *l'aire de la partie correspondante de la surface.* Les considérations qui vont suivre ne s'appuient d'ailleurs que sur le théorème mentionné de M. Radó et les propositions rappelées au § 2. Il s'en suivra aussi immédiatement la relation suivante, établie par M. Tonelli :

$$S \geqq \iint_R \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\,dy,$$

le signe d'égalité ayant lieu dans le seul cas où $f(x,y)$ est absolument continue an sens de cet auteur.

5. Théorème 1. 1°. $z=f(x,y)$ *étant une fonction continue dans le carré* $K_0=(0,0;\ 1,1)$ *et telle que la fonction de rectangle correspondante* $\alpha(R;f)$ *soit intégrable, on a en presque tout point* (x,y):

$$\alpha'(x,y;f) = \alpha'(x,y;V_{(y)}) = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|; \tag{1}$$

2°. *la fonction* $\alpha(R;f)$ *est absolument continue dans le seul*

[5]) Tonelli, l. c. [1]).

cas où la fonction $f(x,y)$ est absolument continue par rapport à y sur presque chaque droite $x=const.$

Démonstration. Je vais d'abord étudier la fonction $\alpha(R;V_{(y)})$ qu'on désignera pour abréger par $\alpha_*(R)$. $\alpha_*(R)$ est évidemment une fonction additive et non-négative. Elle admet donc presque partout une dérivée finie $\alpha'_*(x,y)$ et on a, pour chaque rectangle $R=(x',y';x'',y'')$,

$$(2)\qquad \alpha_*(R)=\int_{x'}^{x''}[V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')]\,dx \geqq \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\alpha'_*(x,y)\,dx\,dy.$$

Fixons, pour un instant, les valeurs y', y''. En considérant les deux côtés de l'inégalité, équivalente à (2),

$$(2^{\text{bis}})\qquad \int_{x'}^{x''}[V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')]\,dx \geqq \int_{x'}^{x''}\left[\int_{y'}^{y''}\alpha'_*\,dy\right]dx,$$

comme des fonctions de l'intervalle linéaire (x',x''), il s'ensuit, en vertu d'un théorème connu de Lebesgue, pour presque toute valeur de x:

$$(3)\qquad V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')\geqq\int_{y'}^{y''}\alpha'_*\,dy.$$

L'ensemble (nécessairement de mesure nulle) des valeurs de x où (3) ne tient pas, dépend, en général, du couple (y',y'') et on désignera cet ensemble, par conséquent, par $E(y',y'')$. Posons maintenant

$$E=\sum_{y',y''}E(y',y''),$$

la sommation n'étant étendue qu'aux couples (y',y'') de nombres *rationnels*. E est donc encore de mesure nulle et on peut affirmer que (3) subsiste pour chaque couple de nombres rationnels (y',y'') et pour chaque x n'appartenant pas à l'ensemble E de mesure nulle. Par suite, pour chaque x n'appartenant pas à l'ensemble E, l'inégalité

$$(4)\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{\partial V_{(y)}}{\partial y}\geqq\alpha'_*(x,y)$$

a lieu pour presque chaque y. Or, tous les ensembles traîtés ici étant, comme on le vérifie aisément, mesurables,[6]) il s'ensuit que (4) a lieu sur une pleine épaisseur du carré considéré.

[6]) La mesurabilité (superficielle) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'ensuit facilement p. ex. de la continuité de $f(x;y)$; l'existence et la sommabilité (superficielle) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des conséquences de l'intégrabilité de $\alpha(R;f)$ qui entraîne (§ 3) la sommabilité de $V_{(y)}(x,1)$.

Pour passer encore de l'inégalité (4) à l'égalité, il suffit de remarquer qu'on a pour chaque rectangle $R=(x',y';\ x'',y'')$:

$$\alpha_*(R)=\int_{x'}^{x''}[V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')]\,dx \geqq \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|dx\,dy,$$

d'où il résulte évidemment que presque partout dans K_0:

$$\alpha_*'(x,y)\geqq\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Donc, en raison de (4)

$$\alpha_*'(x,y)=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|. \tag{5}$$

Remarquons ensuite (§ 3), que $\alpha(R;\ V_{(y)})$ est une intégrale de la fonction $\alpha(R;f)$ et que par conséquent (§ 2) on a presque partout:

$$\alpha'(x,y;f)=\alpha'(x,y;\ V_{(y)})=\alpha_*'(x,y)=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

La relation (1) se trouve donc prouvée complètement.[7]

2⁰. Pour prouver encore la seconde partie de notre proposition, supposons d'abord que $f(x,y)$ soit une fonction absolument continue de y pour presque chaque x On a alors:

$$\alpha(R;f)=\int_{x'}^{x''}|f(x,y'')-f(x,y')|\,dx=$$
$$=\int_{x'}^{x''}\left|\int_{y'}^{y''}\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|dx\leqq\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|dx\,dy$$

et $\alpha(R;f)$ est par conséquent une fonction de rectangle absolument continue. Inversement, si $\alpha(R;f)$ est une telle fonction, son intégrale $\alpha_*(R)=\alpha(R;V_{(y)})$ l'est aussi (§ 2) et — les relations (2), (2^{bis}), (3) se transformant alors en des égalités — il s'en suit que $V_{(y)}$, et par conséquent $f(x,y)$, sont, pour presque chaque x, des fonctions absolument continues de y.

On déduit aussitôt du théorème précédent l'énoncé suivant dont la seconde partie constitue le résultat mentionné plus haut de M Tonelli:

Théorème 2. *Si la surface continue $z=f(x,y)$ admet dans le carré K_0 une aire finie, on a en presque tout point (x,y) de ce carré:*

---

[7]) On peut d'ailleurs démontrer l'égalité $\alpha'(x,y;f)=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ directement, sans faire recours au théorème du § 2.

$$S'(x,y)=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2};$$

d'où, pour chaque rectangle R contenu dans K_0:

$$S(R)\geqq\iint_R\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}dx\,dy,$$

le signe d'égalité ayant lieu dans le seul cas où $f(x,y)$ est absolument continue.[8])

D é m o n s t r a t i o n. $S(R)$ étant (§ 3) l'intégrale de la fonction intégrable $\sigma(R)$, elle est une fonction de rectangle non-négative et additive; elle possède donc en presque tout point de K_0 une dérivée $S'(x,y)$ et l'on a, pour chaque rectangle R contenu dans K_0:

$$S(R)\geqq\iint_R S'(x,y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

D'autre part, en tenant compte du théorème précédent, ainsi que du théorème mentionné au § 2, on a presque partout:

$$S'(x,y)=\sigma'(x,y)=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}.$$

L'inégalité (6) s'écrit donc:

$$S(R)\geqq\iint_R\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}dx\,dy.$$

Le signe d'égalité dans cette relation (ou, ce qui revient au même, dans (5)) n'a lieu que dans le cas où $S(R)$ est une fonction absolument continue de rectangle, ou bien, lorsque (§ 2) la fonction $\sigma(R)\leqq S(R)$ est aussi une telle fonction. Or, on a pour tout rectangle R:

$$\alpha(R),\ \beta(R)\leqq\sigma(R)\leqq\alpha(R)+\beta(R)+m(R),$$

ce qui montre que la continuité absolue de $\sigma(R)$, donc celle de $S(R)$, équivaut à la continuité absolue de $\alpha(R)$ et $\beta(R)$ à la fois, donc, en raison de la 2° partie du théorème précédent, à la continuité absolue de $f(x,y)$ au sens de M. Tonelli.

6. Je veux profiter encore de cette occasion pour remarquer que le théorème de M. Radó permet d'établir immédiatement, pour les surfaces continues $z=f(x,y)$, l'équivalence de la notion de l'aire considérée récemment par M. Banach[9]) avec celle de M. Lebesgue.

[8]) La fonction $f(x,y)$ est appelée par M. Tonelli (l. c. [1])) *absolument continue* lorsqu'elle l'est (au sens de la théorie des fonctions d'une seule variable) sur presque chaque droite parallèle aux axes des coordonnées.

[9]) Banach, Sur les lignes rectifiables etc. *Fund. Math.* t. VII, 1925.

Désignons, dans ce but, pour chaque rectangle R contenu dans le carré K_0 (où la tonction donnée est définie), par R_x resp. R_y les ensembles de points $(x, z=f(x, y))$ resp. $(y, z=f(x, y))$ correspondants aux point (x, y) du rectangle R. Posons ensuite:

$$\sigma_{**}(R)=[m^2(R_x)+m^2(R_y)+m^2(R)]^{1/2}.$$

La définition de Banach s'exprime alors de la manière suivante: *la surface $z=f(x. y)$ est quarrable si la fonction correspondante $\sigma_{**}(R)$ est intégrable; l'intégrale de cette fonction est égale, par définition, à l'aire de la surface envisagée.*

Attribuons, d'autre part, aux symboles $\alpha(f; R)=\alpha(R), \beta(R), \sigma(R)$ le sens établi dans le § 3, et posons encore (comme dans la démonstration du th. 1):

$$\alpha_*(R)=\alpha(R; V_{(y)}),\ \beta_*(R)=\beta(R; V_{(x)}),$$
$$\sigma_*(R)=[\alpha_*^2(R)+\beta_*^2(R)+m^2(R)]^{1/2}.$$

On voit de suite que:

$$\sigma(R)\leqq\sigma_{**}(R)\leqq\sigma_*(R), \tag{1}$$

pour chaque rectangle R contenu dans K_0.

Or, d'après les résultats (§ 3) de MM. Tonelli et Radó, l'intégrabilité de chacune des fonctions $\sigma(R)$, $\sigma_*(R)$ équivaut à la condition que $z=f(x, y)$ admette une aire finie (au sens de Lebesgue) et l'on a:

$$S(K_0)=\int_{K_0}\sigma(R)=\int_{K_0}\sigma_*(R).$$

Il s'ensuit donc de (1) que l'intégrabilité de $\sigma_{**}(R)$ équivaut à la même condition, et qu'on a aussi:

$$S(K_0)=\int_{K_0}\sigma_{**}(K_0).$$

Cette relation exprime précisément l'équivalence en question.

(*Reçu le 27. mars 1927*).

Über Funktionenmengen.

Von PAUL VERESS (Budapest).

Herr FRÉCHET hat in seiner Thèse,[1]) in welcher er den Begriff der kompakten Menge einführt, auch eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit angegeben.[2]) Zweck der vorliegenden Arbeit ist, aus diesem allgemeinen Kriterium notwendige und hinreichende Bedingungen für die Kompaktheit von *Funktionenmengen* abzuleiten. Das sind wohl diejenigen Mengen, die für die Anwendungen am wichtigsten sind. Für diese Mengen ist auch die Kompaktheit auf verschiedene Arten zu definieren, je nach der zu Grunde gelegten Definition der Konvergenz. Von den so erhaltenen möglichen Fällen ist meines Wissens bisher nur ein einziger Fall vollständig erledigt.[3]) In dieser Arbeit werden nun alle diese Fälle systematisch behandelt, dazu wird auch (in § 1.) der erwähnte FRÉCHETsche Satz in etwas abgeänderter Form und wohl auch unter etwas allgemeineren Bedingungen abgeleitet.

§ 1. Kompakte Mengen in einem Fréchetschen Raum.

Wir betrachten eine Menge von beliebigen, aber unendlich vielen Elementen und nehmen an, dass zu jedem Paar von Elementen P, Q eine nicht negative Zahl $\overline{PQ}$ als ihre *Entfernung*

---

[1]) *Rendiconti di Palermo* XXII, 1906.

[2]) l. c. p. 25.

[3]) C. ARZELÀ, Sulle funzioni di linee, *Memorie d. R. Acad. d. Scienze di Bologna*, Serie 5, Bd. 1895. — Vgl. jedoch auch eine nach Fertigstellung dieser Arbeit erschienene Note des Herrn FRÉCHET (*Fundamenta Math.* IX), die anschliessend an meine Untersuchung (ebenda Bd. VII) den hier im § 5 behandelten Fall untersucht. — Ich erhielt von Herrn FRÉCHET, dem ich die Resultate meiner Untersuchungen mitteilte, nicht nur einige Litteraturangaben, sondern auch nützliche sachliche Bemerkungen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

zugeordnet werden kann. Die Entfernung soll noch folgenden Bedingungen genügen:

1) $$\overline{PP} = 0,$$

2) $$\overline{PQ} = \overline{QP} > 0,$$

wenn P und Q verschieden sind.

Durch das Ausschliessen des Gleichheitszeichens kehren wir hier 1) um, nämlich wir betrachten als identisch solche Elemente, deren Entfernung Null ist.

3) $$\overline{PQ} + \overline{QR} \geqq \overline{PR}.$$

Eine unendliche Menge, in der eine diesen Bedingungen genügende Entfernungsdefinition eingeführt ist, nennen wir einen FRÉCHETschen Raum D, kurz Raum D *(Distanzraum)*.

Eine Folge von Elementen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des Raumes wird *konvergent* genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$\overline{P_\mu P_\nu} < \varepsilon$$

ist für $\mu > N$, $\nu > N$. Dank der Dreieckseigenschaft 3) ist dies gleichbedeutend mit der Existenz einer Zahl n, so dass $\overline{P_n P_{n+p}} < \varepsilon$ ist, $p = 1, 2, 3, \ldots$

Zu dieser Definition der Konvergenz bemerke ich, dass sie sich mit dem üblichen Konvergenzbegriff nur dann deckt, wenn aus $\overline{P_n P_{n+p}} \to 0$ die Existenz eines Elementes P folgt, für das $\lim \overline{PP_n} = 0$ gilt. In diesem Falle wird der Raum *vollständig* genannt. Jeder Raum D kann aber durch Einführung von uneigentlichen Elementen (entsprechend der Einführung der irrationalen Zahlen) zu einem vollständigen Raum erweitert werden, worauf ich hier nicht näher eingehen will. In den zu behandelnden einzelnen Fällen werden wir immer zeigen, dass die Grenzelemente der konvergenten Folgen im betrachteten Raume existieren.

Eine Menge A von Elementen des Raumes wird *kompakt* genannt, wenn jede unendliche Untermenge von A eine konvergente Teilfolge enthält.[4])

Eine konvergente Folge bildet eine kompakte Menge. Es gibt aber auch nicht abzählbare kompakte Mengen, z. B. im Euklidi-

---

[4]) Eine endliche Menge wird also als kompakt betrachtet. Über die Benennungen vergleiche auch M. FRECHET, Sur la terminologie de la théorie des ensembles abstraits, *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes en 1924. Sciences.*

schen linearen Raum ein beschränktes Intervall, wenn man die gewöhnliche Entfernungsdefinition zu Grunde legt. Beispiele für nicht kompakte Mengen sind: im selben Raum eine nicht beschränkte Punktmenge, oder im Raume der für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ definierten stetigen Funktionen unter Zugrundelegung der Entfernungsdefinition:

$$\overline{f, \varphi} = \operatorname{Max} |f(x) - \varphi(x)|,$$

die abzählbare gleichmässig beschränkte Menge:

$$f_1(x) = \sin x, \ldots, f_n(x) = \sin nx, \ldots$$

Aus der Definition der kompakten Menge folgt unmittelbar:

Jede Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

Die Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt. Wir behaupten weiter:

Ist eine Menge A des Raumes D kompakt, so lässt sich zu jeder positiven Zahl ε eine endliche Anzahl von Elementen B_1, $B_2, \ldots, B_n$ aus der Menge so herausgreifen, dass jedes Element P von A für ein geeignetes i aus $1, 2, \ldots, n$ die Bedingung

$$\overline{B_i P} < \varepsilon$$

erfüllt.

Die Folge $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nennen wir eine zu ε gehörende *Basis* von A.

Diese Behauptung beweisen wir so. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben, P_1 irgendein Element von A. Entweder erfüllen alle übrigen Elemente von A die Bedingung:

$$\overline{PP_1} < \varepsilon$$

oder aber es gibt in der Menge ein P_2 so dass

$$\overline{P_1 P_2} \geqq \varepsilon$$

ist. Im ersten Falle ist P_1 selbst eine Basis. Im zweiten Falle ist entweder P_1, P_2 eine Basis, oder aber es gibt ein Element P_3 von der Eigenschaft:

$$\overline{P_1 P_3} \geqq \varepsilon, \ \overline{P_2 P_3} \geqq \varepsilon.$$

Dieses Auswahlverfahren setzen wir nun so fort. Entweder bricht es nach endlich vielen, etwa n, Schritten ab, und dann ist $P_1, P_2, \ldots, P_n$ eine Basis, oder lässt es sich ins Unendliche fortsetzen, d. h. es kann aus der Menge A die Folge

1) $$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

mit den Eigenschaften

2) $$\overline{P_i P_k} \geqq \varepsilon, \ (i \neq k)$$

herausgewählt werden. Ist aber die Menge A kompakt, so kann dieser zweite Fall nicht eintreten, denn die unendliche Folge könnte wegen (2) keine konvergente Teilfolge enthalten.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Dieselbe ist aber auch umkehrbar. In der Tat, nehmen wir an, dass die Menge A für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Basis besitzt. U sei eine beliebige, unendliche Untermenge von A; wir haben zu zeigen, dass sie eine konvergente Folge enthält.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ eine gegen Null konvergierende Folge von positiven Zahlen. Entsprechend der Voraussetzung gehört zu jedem ε_i eine Basis $B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \ldots, B_{n_i}^{(i)}$. Jedes Element P von U steht zu einem geeigneten $B_k^{(1)}$ in der Beziehung:

3) $$\overline{PB_k^{(1)}} < \varepsilon_1.$$

Da U unendlich viele Elemente hat und die Basis nur endlich ist, muss es entsprechend dem Schachtelprinzip mindestens ein $B_k^{(i)}$ geben, mit dem unendlich viele Elemente: $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \ldots$ in der Beziehung 3) stehen.

Diese Elemente erfüllen auf Grund der Dreieckseigenschaft die Ungleichung: $\overline{P_i^{(1)}P_k^{(1)}} < 2\varepsilon_1$.

In der Folge $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \ldots$ gibt es wieder unendlich viele, die mit demselben $B_{k'}^{(2)}$ die Ungleichung:

$$\overline{P_i^{(2)}B_{k'}^{(2)}} < \varepsilon_2$$

erfüllen, für die Elemente dieser Folge gilt also:

$$\overline{P_i^{(2)}P_k^{(2)}} < 2\varepsilon_2.$$

Man setze dieses Verfahren fort. Die Folge $P_1^{(1)}, P_2^{(2)}, \ldots, P_n^{(n)}, \ldots$ ist konvergent, da ja

$$\overline{P_n^{(n)}P_{n+k}^{(n+k)}} < 2\varepsilon_n \text{ ist } (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus ergibt sich also der

Satz I. *Für die Kompaktheit der Menge A von Elementen eines Raumes D ist notwendig und hinreichend die Existenz einer endlichen Basis für jede positive Zahl ε.*

Diesen Satz können wir etwas roh aber sehr anschaulich so aussprechen: Abgesehen von einer Abweichung kleiner als ε, besitzt jede kompakte Menge nur endlich viele Elemente.

§ 2. A-kompakte Funktionenmengen.

Für unseren Raum wählen wir jetzt den Raum der in $a \leqq x \leqq b$ definierten stetigen Funktionen. Die Entfernung zweier Elemente f und g dieses Raumes definieren wir durch:

$$\overline{f, g} = \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - g(x)|.$$

Die Konvergenz einer Folge bedeutet also gleichmässige Konvergenz im üblichen Sinne, eine in diesem Sinne kompakte Funktionenmenge hat also die Eigenschaft, dass jede ihrer unendlichen Untermengen mindestens eine gleichmässig konvergente Folge enthält. Solche Funktionenmengen nennen wir kompakt im Sinne A, oder kurz A-kompakt.

Dem Satz I entsprechend ist dafür, dass eine Menge dieses Raumes A-kompakt sei, notwendig und hinreichend, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ die Basis $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ existiere so, dass jedes f der Menge mit einem geeigneten φ_i in der Beziehung

$$\operatorname{Max} |f(x) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$$

stehe. Daraus sieht man sofort, dass eine A-kompakte Funktionenmenge gleichmässig beschränkt ist; als gemeinsame Schranke gilt $M+\varepsilon$, wenn M die grösste der Schranken M_i von φ_i bezeichnet. Dies ist also die erste notwendige Bedingung; eine zweite erhält man durch folgende Überlegung:

Die Elemente dieses Raumes sind alle gleichmässig stetige Funktionen. Es sei A eine kompakte Menge in diesem Raume, ε eine beliebige positive Zahl und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörende Basis der Menge. Zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehört für die Funktion φ_i eine Zahl $\delta_i > 0$ so, dass falls $|x - y| < \delta_i$ ist,

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ausfällt.}$$

Dies folgt aus der gleichmässigen Stetigkeit von φ_i Die kleinste der Zahlen $\delta_1, \ldots, \delta_n$ werde mit δ bezeichnet. Wegen

$$|f(x) - \varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad a \leqq x \leqq b$$

und

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |x - y| < \delta$$

gilt dann

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ wenn } |x - y| < \delta,$$

für jede Funktion f der Menge A.

Wir können also sagen: die Funktionen der kompakten Menge A sind *gleichartig gleichmässig stetig*, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört für alle Funktionen der Menge ein gemeinsames Stetigkeitsintervall δ.

Diese beiden notwendigen Bedingungen sind zusammen auch hinreichend für die Kompaktheit im Sinne A Nehmen wir an, dass die Funktionen einer Menge A gleichmässig beschränkt und gleichmässig stetig sind. Die Schranke der Funktionen sei M, zu $\varepsilon > 0$ gehöre δ als gemeinsames Stetigkeitsintervall. Man teile das rechtwinklige Viereck:

$$-M \leqq y \leqq M, \quad a \leqq x \leqq b$$

mit einem rechtwinkligen Netze in endlich viele, kleine Vierecke so ein, dass die Höhen der neuen Vierecke kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$, die Längen $< \delta$ werden. In diesem Netz verbinde man auf alle mögliche Arten die Eckpunkte der Vierecke; man erhält endlich viele solche gebrochene gerade Linien, die von der Geraden $y = a$ bis zur Geraden $y = b$ durchlaufen, also stetige Funktionen von x darstellen. Diese streckenweise linearen Funktionen mögen durch $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ bezeichnet werden; sie haben schon die Eigenschaft, dass jede Funktion f der Menge A durch eine von ihnen mit der Genauigkeit $\frac{\varepsilon}{2}$ repräsentiert wird. Anstatt jedem ψ_i nehme man nun irgendeine der von ihm bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ dargestellten Funktionen von A; diese Funktion sei φ_i. Diejenigen ψ_k, die kein entsprechendes φ_k haben, werden einfach weggelassen. Die so erhaltenen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bilden eine zu ε gehörende Basis von A. Aus der Existenz der Basis folgt wiederum die Kompaktheit der Menge.

Mithin haben wir folgenden Satz von Arzelà:

Damit eine Menge von in $a \leqq x \leqq b$ stetigen Funktionen A-kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Funktionen

1. *gleichmässig beschränkt,*
2. *gleichartig gleichmässig stetig seien.*

Nun legen wir den Raum der auf der messbaren Menge H messbaren Funktionen zu Grunde, behalten aber die obige Entfernungsdefinition, genauer als Entfernung von f und g bezeichnen wir die obere Grenze von $|f - g|$, wenn x alle Punkte von H durchläuft. Ist f eine beschränkte Funktion dieses Raumes, so sind die Mengen e_k der Punkte, in denen

$$-M + k\varepsilon \leqq f \leqq -M + (k+1)\varepsilon$$

ist, alle messbar.

Auf jeder der Mengen e_k ist die Variation von f, das ist die absolut genommene Differenz der oberen und unteren Grenze von f auf e_k kleiner als ε:

$$V_f(e_k) < \varepsilon.$$

Die Grundmenge H lässt sich also in endlich viele punktfremde messbare Teilmengen einteilen:

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

so dass

$$V_f(e_k) < \varepsilon$$

ist auf jeder der Mengen e_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Es sei K eine kompakte Menge von messbaren Funktionen, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die zu $\varepsilon > 0$ gehörige Basis. Man bilde die zu ε gehörenden Einteilungen für alle φ_i:

$$H = e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{\lambda_i}^{(i)},$$

so dass also $\quad V_{\varphi_i}(e_k^{(i)}) < \varepsilon \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, \lambda_i \end{pmatrix}.$

Wir bilden nun den Durchschnitt aller Kombinationen von diesen Mengen

$$e_{i_1}^{(1)} e_{i_2}^{(2)} \ldots e_{i_n}^{(n)}$$

und die Einteilung:

$$H = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} e_{i_1}^{(1)} \ldots e_{i_n}^{(n)}.$$

Ist e_k^* eine Menge dieser Einteilung, so gilt:

$$V_{\varphi_i}(e_k^*) < \varepsilon \text{ für jedes } i = 1, 2, \ldots, n,$$

und wegen

$$|f - \varphi_i| < \varepsilon,$$

gilt auch für jedes f:

$$V_f(e_k^*) < 3\varepsilon.$$

Für alle Funktionen der kompakten Menge gibt es also zu jedem ε eine gemeinsame Einteilung $H = \sum_{k=1}^{m} e_k$ so, dass:

$$V_f(e_k) < \varepsilon$$

für alle f und alle $k = 1, 2, \ldots, m$ ist.

Mit Hinzunahme der Beschränktheit gilt auch das Umgekehrte. Dies sieht man ein, indem man alle *Treppenfunktionen* bildet die in den Punkten der Menge e_i alle möglichen Werte $-M + k \cdot \varepsilon$ annehmen $\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{2M}{\varepsilon}\right] + 1; i = 1, 2, \ldots, n\right)$. Aus diesen Treppenfunktionen erhält man eine zu ε gehörende Basis durch dasselbe Verfahren, welches für den Raum der stetigen Funktionen angegeben wurde.

Damit haben wir neben dem ARZELÀschen Satz den

Satz II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit einer Menge von auf H messbaren Funktionen ist folgendes:*

1. *Die Funktionen der Menge sind gleichmässig beschränkt auf H.*
2. *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Einteilung der Gundmenge H in punktfremde, messbare Teilmengen* $H = \sum_{i=1}^{n} e_i$ *so, dass für jede Funktion f aus der Menge und für jedes i die Ungleichung* $V_f(e_i) < \varepsilon$ *erfüllt ist.*[5])

§ 3. B-kompakte Funktionenmengen.

Wir betrachten nun eine Menge von messbaren Funktionen, die auf der Punktmenge H von positivem endlichem Mass definiert sind. Diese Funktionenmenge nennen wir B-kompakt, wenn jede ihrer unendlichen Untermengen eine fast überall (d. h. überall höchstens ausser einer Nullmenge) konvergierende Teilfolge enthält.

Zur Behandlung dieses Falles führen wir noch einen von Herrn F. RIESZ herrührenden Konvergenzbegriff ein.[6])

Eine Folge von messbaren Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots$ konvergiert *dem Masse nach* gegen die messbare Funktion f auf H, wenn es zu jedem Zahlenpaar $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ ein Index n so gehört, dass

$$|f - f_\nu| < \varepsilon \text{ für } \nu > n$$

ist, höchstens ausser einer Telmenge von H deren Mass $< \alpha$ ist.

Konvergiert die Folge $f_1, f_2, f_3, \dots$ fast überall, so konvergiert sie auch dem Masse nach.

Das sieht man so ein: konvergiert die Folge $f_1, f_2, f_3, \dots$ in den Punkten von H ausser einer Nullmenge N, so ist der auf N beliebig definierte Limes der Folge eine ebenfalls messbare Funktion f. Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist die Menge $P(n, \varepsilon)$ der Punkte, in denen

$$|f_n - f| > \varepsilon \text{ ist,}$$

messbar und da die Folge ausser N konvergiert, ist $\lim_{n \to \infty} P(n, \varepsilon) = N$

---

[5]) Vgl. auch P. VERESS, Über kompakte Funktionenmengen und BAIREsche Klassen, *Fund. Math.* Bd. VII.

[6]) F. RIESZ, Sur les suites de fonctions mesurables, *Comptes Rendus* 150, 1909. Ich bemerke, dass ich die Resultate dieses Paragraphen ursprünglich aus einem EGOROFFschen Satze (Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R.* 152, 1911) herleitete; die hier angegebene Beweisanordnung wurde mir von Herrn F. RIESZ vorgeschlagen.

unabhängig von ε. Wir bezeichnen mit

$$S(n,\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty}P(\nu,\varepsilon)$$

die Vereinigungsmenge aller $P(\nu,\varepsilon)$ von $\nu=n$ an. Es ist dann

$$S(n,\varepsilon)\supset S(n+1,\varepsilon)\supset S(n+2,\varepsilon)\supset\ldots$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} S(n,\varepsilon)$ als der Durchschnitt aller Mengen $S(\nu,\varepsilon)$ von $\nu=n$ an, ist ebenfalls die Nullmenge N, d. h.:

$$m\left(\lim_{n\to\infty} S(n,\varepsilon)\right)=0,$$

daher:[7])

$$\lim_{n\to\infty} mS(n,\varepsilon)=0.$$

Zu vorgegebenem $\eta>0$ kann also n so gewählt werden, dass $mS(\nu,\varepsilon)<\eta$ beträgt, sobald $\nu\geqq n$ ist und das heisst eben, dass die Folge dem Masse nach konvergent ist.

Das Umgekehrte gilt nicht, aber man kann nach Herrn F. Riesz (l. c.) aus jeder dem Masse nach konvergenten Folge eine fast überall konvergente Teilfolge auswählen.

In der Tat sei $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die dem Masse nach konvergente Folge und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu$ eine konvergente Reihe positiver monoton abnehmender Zahlen. Zu jedem ε_ν kann man eine Funktion f_ν^* so bestimmen, dass

$$|f-f_\nu^*|<\varepsilon_\nu$$

sei ausser einer Menge vom Masse $<\varepsilon_\nu$, und dass die Funktionen $f_1^*, f_2^*, \ldots$ verschiedene Funktionen der Folge $\{f_\nu\}$ seien. Diese Folge konvergiert fast überall; denn sie konvergiert gleichmässig ausser einer Menge, deren Mass beliebig klein ist. Denn sind zwei Zahlen $\varepsilon>0$ und $\alpha>0$ gegeben, so suche man die natürliche Zahl n, für welche

$$\varepsilon_n<\varepsilon \text{ und } \sum_{\nu=n}^{\infty}\varepsilon_\nu<\alpha \text{ ist,}$$

dann gilt für $\nu>n$

$$|f-f_\nu|<\varepsilon$$

ausser einer Menge, deren Mass $\leqq \sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\varepsilon_\nu<\alpha$ ist.

Enthält also jede unendliche Untermenge einer Funktionenmenge eine dem Masse nach konvergente Teilfolge, so enthält sie

[7]) Vgl. C. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Berlin 1917, p. 256, Satz 12 von § 250.

auch eine fast überall konvergente und umgekehrt; Kompaktheit auf Grund der Konvergenz ausser einer Nullmenge ist identisch mit Kompaktheit auf Grund der Konvergenz dem Masse nach. Diese letztere Konvergenz können wir aber auf einen Entfernungsbegriff zurückführen.[8])

Sind f und g zwei messbare Funktionen, die auf der messbaren Menge H erklärt sind, so definieren wir als ihre Enfernung (f, g) die untere Grenze der Zahlen

$$\varepsilon + m(\varepsilon; f, g),$$

wenn ε eine positive reelle Zahl ist und $m(\varepsilon; f, g)$ das Mass derjenigen Menge bedeutet, auf welcher

$$|f - g| > \varepsilon$$

gilt.

Ist $(f, g) = 0$, so können die Funktionen f und g höchstens auf einer Nullmenge verschieden sein. Solche Funktionen betrachten wir jetzt als identisch; dies entspricht auch der Natur der fast überall stattfindenden Konvergenz.

Wir haben noch zu zeigen, dass dieser Entfernungsbegriff auch die Dreieckseigenschaft hat. Bezeichnen f, g und h drei Funktionen unseres eben betrachteten Raumes, und ist δ eine beliebige positive Zahl, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\varepsilon + m(\varepsilon; f, g) < (f, g) + \delta$$

und ein ε', so dass

$$\varepsilon' + m(\varepsilon'; g, h) < (g, h) + \delta.$$

Ausser der Menge vom Masse $m(\varepsilon; f, g) + m(\varepsilon'; g, h)$ gilt überall:

$$|f - g| + |g - h| < \varepsilon + \varepsilon'$$

also auch:

$$|f - h| < \varepsilon + \varepsilon'$$

und daher:

$$(f, h) \leqq \varepsilon + \varepsilon' + m(\varepsilon; f, g) + m(\varepsilon'; g, h) < (f, g) + (g, h) + 2\delta.$$

Da aber δ beliebig war, folgt hieraus:

$$(f, h) \leqq (f, g) + (g, h).$$

Es gilt nun folgender Satz von Herrn F. Riesz:

Damit die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ dem Masse nach konvergiere, ist es notwendig und hinreichend, dass $\lim\limits_{\substack{i=\infty \\ k=\infty}} (f_i, f_k) = 0$ sei. (Das

---

[8]) Vgl. auch M. Fréchet, L'écart de deux fonctions quelconques, *C. R.* 162, 1916; Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, XI, 1921.

heisst soviel, dass das Konvergenzkriterium von Cauchy auch in diesem Raume erfüllt ist.)

Dass diese Bedingung notwendig ist, das ergibt sich sofort aus der soeben bewiesenen Dreieckseigenschaft der Entfernung; dass sie hinreichend ist, beweisen wir so: Genügt die Folge dieser Bedingung, so enthält sie eine fast überall konvergente Teilfolge. Diese letztere: $f_1^*, f_2^*, f_3^*, \ldots$ wird wieder mit Hilfe der konvergenten Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ folgendermassen bestimmt. f_n^* sei die erste auf f_{n-1}^* folgende Funktion der Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ für welche alle Funktionen mit grösserem Index die Bedingung

$$(f_\nu, f_n^*) < \varepsilon_n$$

erfüllen. (Die Existenz einer solchen f_n^* folgt aus $\lim\limits_{\substack{i=\infty\\k=\infty}} (f_i, f_k) = 0$.)

Man sieht wieder wie vorhin, dass die Folge $\{f_n^*\}$ ausser einer Menge von beliebig kleinem Masse gleichmässig konvergiert, sie konvergiert also fast überall. Bezeichnet f den auf einer Nullmenge beliebig definierten Limes von f_n^*, so folgert man aus $\lim (f_n^*, f) = 0$ und $\lim (f_i, f_k) = 0$,

$$\lim (f_\nu, f) = 0$$

und diese letzte Gleichung zeigt, dass die Folge $\{f_n\}$ dem Masse nach gegen f konvergiert.

Aus diesem Grunde bedeutet die Kompaktheit im Sinne *B)* nichts anderes als dass jede unendliche Untermenge eine Teilfolge mit $\lim\limits_{\substack{i=\infty\\k=\infty}} (f_i, f_k) = 0$ enthält. Die Anwendung des Satzes I. ergibt also den

Satz III. *Damit eine Menge von messbaren Funktionen kompakt im Sinne B) sei, ist notwendig und hinreichend, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ eine Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ existiere, so dass für jede Funktion f der Menge ein ψ_i die Bedingung:*

$$|f - \psi_i| < \varepsilon$$

erfüllt ausser auf einer Menge h, deren Mass $mh < \alpha$ ist.

Für die Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ kann man eine gemeinsame Einteilung:

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_r$$

machen, wie in § 2, so dass also

$$V_{\psi_i}(e_k) < \varepsilon \text{ sei. } \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

Wegen der Basiseigenschaft der Funktionen ψ_i gibt es dann für jedes f eine Menge h, für die $mh < \alpha$ ist, so dass

$$V_f(e_k \, . \, h) < \varepsilon \text{ ist für jedes } k = 1, 2, \ldots, r.$$

Diese Bedingung ist aber allein nicht hinreichend, wie es auch für die Kompaktheit im Sinne *A)* nicht genügend war. Um eine hinreichende Bedingung zu erhalten braucht man nicht die gleichmässige Beschränktheit wie dort hinzuzunehmen, sondern nur die Beschränktheit ausser einer Menge von beliebig kleinem Mass. In der Tat kann man in diesem Falle die Treppenfunktionen bilden und weiter schliessen wie im § 2.

So erhalten wir neben Satz III den

Satz IV. *Eine Funktionenmenge ist dann und nur dann kompakt im Sinne B), wenn*

1. *zu jedem* $\eta > 0$ *ein* $M > 0$ *so gehört, dass für jede Funktion* f *der Menge*: $|f| < M$ *ist ausser einer Menge, deren Mass* $< \eta$ *ist.*

2. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $\alpha > 0$ *existiert die Einteilung der Grundmenge* H *in messbare Teilmengen:*

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

und für jede der Funktionen f *eine Menge* h *mit* $mh < \alpha$, *so dass:*

$$V_f(e_i - e_i \, . \, h) < \varepsilon \text{ sei, } i = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 5. C-kompakte Funktionenmengen.

Für unsere weitere Betrachtungen wählen wir jetzt den Raum der auf der beschränkten, messbaren Menge H erklärten, quadratisch integrierbaren Funktionen. Die Entfernung zweier Elemente dieses Raumes definieren wir durch

$$\overline{f, g} = \Big[\int_H (f-g)^2 \, dx\Big]^{1/2}.$$

Diese Entfernungsdefinition erfüllt die in § 1 verlangten Eigenschaften der Entfernung.

In diesem Sinne wird also eine Menge der quadratisch integrierbaren Funktionen C-kompakt genannt, wenn jede unendliche Untermenge eine im Mittel konvergente Folge enthält. Eine im Mittel konvergente Folge ist aber auch konvergent dem Masse naoh, daher ist auch *aus jeder im Mittel konvergenten Funktionenfolge eine fast überall konvergente Teilfolge auswählbar.*[9]) Hieraus schliesst man weiter, dass aus der Grenzgleichung

[9]) Vgl. E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R.* 144, 1907.

$$\int_H (f_m - f_n)^2\, dx \to 0$$

die Existenz einer quadratisch integrierbaren Funktion f folgt, für die

$$\int_H (f - f_n)^2\, dx \to 0$$

gilt; diese Funktion ist eben die auf einer Nullmenge beliebig definierte Grenzfunktion der fast überall konvergenten Teilfolge.

Hiemit haben wir gezeigt, dass das Konvergenzkriterium von Cauchy auch in unserem jetzt betrachteten Raume erfüllt ist, dass also unsere Konvergenzdefinition sich auch jetzt mit der üblichen deckt (vgl. § 1).

Ferner folgt aus derselben Überlegung, dass jede C-kompakte Menge auch kompakt im Sinne *B)* ist; so ergibt Satz III eine notwendige Bedingung für die Kompaktheit im Sinne *B)*.

Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, d. h. es gibt Funktionenmengen, die B-kompakt aber nicht C-kompakt sind. Zum Beispiel sei H das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und

$$f_1 \equiv 1, \qquad f_n = 2^{\frac{n-1}{2}} \text{ in } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$f_n = 0 \text{ in } \frac{1}{2^{n-1}} < x \leqq 1.$$

Durch Anwendung des Satzes I erhalten wir als notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit im Sinne *C)* die Existenz einer Basis $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu jedem $\varepsilon > 0$ so, dass jede Funktion f der Menge zu einer geeigneten Funktion φ_i in der Beziehung

$$\int_H (f - \varphi_i)^2\, dx < \varepsilon$$

stehe.

Da alle φ_i selbst quadratisch integrierbare Funktionen sind, also $\int_H \varphi_i^2 dx$ endliche Zahlen sind $(i = 1, 2, \ldots, n)$, erhalten wir hieraus weiter als eine notwendige Bedingung der Kompaktheit die Beschränktheit von $\int_H f^2\, dx$. Aber noch mehr, die unbestimmten Integrale $\int_e \varphi_i^2 dx$ sind alle *totalstetige* Mengenfunktionen, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\alpha_i > 0$ so, dass

$$\int_e \varphi_i^2 dx < \varepsilon$$

ist, wenn nur $me < \alpha_i$ ist, und $e \subset H$.

Die kleinste der Zahlen α_i sei α, e sei eine Menge, deren Mass $me < \alpha$ ist und f irgendeine Funktion aus der kompakten Menge. Wir haben:

$$(1) \qquad \int_e (f-\varphi_i)^2\,dx \leqq \int_H (f-\varphi_i)^2\,dx < \varepsilon$$

wegen der Basiseigenschaft der φ_i.

Ferner folgt aus $f = \varphi_i + (f-\varphi_i)$,

$$(2) \qquad \int_e f^2\,dx \leqq 2\left\{\int_e \varphi_i^2\,dx + \int_e (f-\varphi_i)^2\,dx\right\} \leqq 2\,.\,2\varepsilon.$$

Zu dem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gehört also ein $\alpha > 0$ so, dass

$$\int_e f^2\,dx < \varepsilon$$

ausfällt für alle Funktionen f der kompakten Menge, wenn nur

$$me < \alpha$$

ist. Diese Eigenschaft der Funktionen drücken wir so aus: *die Mengenfunktionen $\int_e f^2\,dx$ sind gleichartig totalstetig.*

Diese notwendige Bedingung ist jedoch nicht hinreichend für die Kompaktheit im Sinne *C)*. Dies zeigt schon das einfache Beispiel der Folge:

$f_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ im Intervall: $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Es gilt aber der

Satz V. *Damit eine Menge der auf einer beschränkten, messbaren Menge H quadratisch integrierbaren Funktionen kompakt im Sinne C) sei, ist notwendig und hinreichend, dass*

1. *zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gehört, dass für alle Funktionen der Menge $\int_e f^2\,dx < \varepsilon$ ausfalle, wenn nur $me < \delta$ ist;*

2. *zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ existiere eine Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ so dass für jede Funktion f ein ψ_i die Bedingung*

$$|f - \psi_i| < \varepsilon$$

erfüllt, ausser einer Menge h, deren Mass $mh < \alpha$ ist.

Wir brauchen nur noch die Hinlänglichkeit der Bedingungen zu zeigen. Nehmen wir also an, die Bedingungen 1. und 2. seien erfüllt für die Funktionenmenge K. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{8}$ suche man α so, dass

$$\int_e f^2\,dx < \frac{\varepsilon}{8}$$

ausfalle für $me < \alpha$. Zu diesem α und $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{2mH}\right)^{1/2}$ existiert die Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ im Sinne der Bedingung 2). Für jedes f gibt es also ein ψ_i mit:

$$|f - \psi_i| < \eta \text{ ausser } h, \text{ wo } mh < \alpha \text{ ist.}$$

Daher ist auch

$$\int_H (f - \psi_i)^2 dx \leqq \eta^2 . mH + \int_h (f - \psi_i)^2 dx \leqq \frac{\varepsilon}{2} + 4 . \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon,$$

also ist $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ auch eine Basis, die zu ε im Sinne von § 1 gehört. Aus der Existenz dieser Basis folgt aber, dass die Menge kompakt im Sinne *C)* ist.

Für die Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ kann man eine gemeinsame Einteilung:

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_r$$

machen wie im § 2 und 4, dass also

$$V_{\psi_i}(e_k) < \varepsilon \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

sei. Wegen der Basiseigenschaft der Funktionen ψ_i gibt es dann für jedes f eine Menge h, für die $mh < \alpha$ ist, so dass:

$$V_f(e_k - h . e_k) < \varepsilon$$

ist für jedes $k = 1, 2, \ldots, r$.

Aber auch umgekehrt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine derartige Einteilung der Grundmenge H und ist auch die Bedingung 1) des Satzes V erfüllt, so wird auch 2) erfüllt, daher ist die Menge kompakt. Denn aus der Bedingung 1) folgt erstens die gleichmässige Beschränktheit von $\int_H f^2 dx$. (*H* war beschränkt vorausgesetzt, also mH endlich.) Daraus folgt wieder zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Schranke M so, dass $|f| < M$ gilt für jedes f ausser einer Menge, deren Mass $< \alpha$ ist. Man bilde alle möglichen Treppenfunktionen, die auf jeder Menge e_k einen der Werte $-M + i . \frac{\varepsilon}{2}$ haben $\left(k = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{4M}{\varepsilon}\right] + 1\right)$.

Diese Funktionen bilden eine Basis im Sinne der Bedingung 1). Wir haben also neben V den

Satz VI. *Damit eine Funktionenmenge kompakt im Sinne C) sei, ist es notwendig und hinreichend, dass*

1. *die Mengenfunktionen* $\int f^2 dx$ *gleichartig totalstetig sind,*

2. *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $\alpha > 0$ *existiere die Einteilung der Grundmenge in messbare Teilmengen:*

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

und für jede der Funktionen f *eine Menge* h *mit* $mh < \alpha$ *so dass*

$$V_f(e_i - e_i h) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Es entsteht nun die Frage, ob es vielleicht möglich wäre eine gemeinsame Menge h für alle Funktionen der kompakten Menge zu finden. Dem ist es doch im allgemeinen nicht so, auch dann nicht, wenn die C-kompakte Menge nur aus einer im Mittel konvergenten Folge besteht. Das zeigt das folgende Beispiel: Im Intervall $(0, 1)$ sei:

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \text{ für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},\ f_3(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_{2^n+1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 \text{ für } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq 1 \end{cases},\ f_{2^{n+1}+k} = \begin{cases} 1 \text{ für } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{k+1}{2^{n+1}} \\ 0 \text{ für alle übrigen } x. \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots, (2^{n+1} - 1),$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dies ist auch ein Beispiel einer im Mittel konvergenten Folge, die im gewöhnlichen Sinne in keinem Punkte des Intervalles $(0, 1)$ konvergiert.[10])

Die Überlegungen dieses Paragraphen bleiben auch gültig, wenn man die Entfernung anstatt durch die mittlere quadratische Abweichung durch die mit irgendeinem Exponenten $p > 0$ gebildete mittlere Abweichung definiert.

(*Eingegangen am 22. IV. 1927*).

[10]) Über die Existenz solcher Folgen vgl. F. RIESZ, Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, Bd. 69, 1910, p. 464.

Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées.[1])

Par CHARLES JORDAN à Budapest.

I. Problèmes à une variable.

§ 1. *Premier problème.* Une urne contient a boules blanches et b boules noires. Soit $a+b=m$. On tire une boule, puis on rajoute dans l'urne $h+1$ boules de la même couleur que la boule sortie. h peut être un entier positif, négatif ou zéro. On répète l'opération n fois et l'on demande la probabilité d'obtenir ν boules blanches dans ces n épreuves. Evidemment on doit avoir

$$a > -(\nu-1)h \quad \text{et} \quad b > -(n-\nu-1)h.$$

La probabilité cherchée $P(\nu)$ est déduite du théorème des probabilités composées.

$$(1)\quad P(\nu)=\binom{n}{\nu}\frac{a(a+h)\ldots(a+\nu h-h)b(b+h)\ldots(b+nh-\nu h-h)}{m(m+h)\ldots(m+nh-h)}.\text{[2])}$$

Le cas $h=0$ correspond au problème de BERNOULLI : on remet après chaque tirage la boule sortie.

Le cas $h=-1$ est aussi remarquable: on tire les boules successivement sans rien remettre ou l'on tire n boules en même temps.

Supposons $h \neq 0$ et écrivons pour simplifier $a/h=\beta$, $m/h=\mu$ et $b/h=\mu-\beta$; la probabilité (1) peut être mise sous la forme

---

[1]) Voir: CH. JORDAN, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 184, p. 315.

[2]) Dans ce qui suit, le symbole $\binom{z}{\lambda}$ signifie le coefficient généralisé du binome:

$$\binom{z}{\lambda}=\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(z-\lambda+1)}.$$

$$(2) \qquad P(\nu)=\frac{\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}}{\binom{-\mu}{n}}.$$

On peut encore transformer cette formule en remarquant que

$$\binom{\beta-\mu}{n-\nu}=\frac{\binom{n}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{\beta-\mu-n+\nu}{\nu}}=(-1)^{\nu}\frac{\binom{n}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{\mu-\beta+n-1}{\nu}};$$

par suite, si l'on pose $\alpha=-n$ et $\gamma=\beta-\mu-n+1$, il résulte de (2)

$$(3) \qquad P(\nu)=\frac{\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{-\mu}{n}}(-1)^{\nu}\frac{\binom{-\alpha}{\nu}\binom{-\beta}{\nu}}{\binom{-\gamma}{\nu}}$$

Cette transformation n'est justifiée que si $\binom{\beta-\mu}{n}\neq 0$. Lorsque $h>0$, ceci a toujours lieu. Lorsque $h<0$ et β, μ sont des entiers, il faut que l'on ait en outre $\beta-\mu\geqq n$ c.-à-d. $b\geqq -hn$; si cette condition n'est pas satisfaite, on a $-\gamma\geqq 0$ et pour les valeurs $\nu>-\gamma$, le dénominateur aussi devient zéro.

De la formule (2) on peut tirer la conclusion importante que la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n+1$-ième coup est *indépendante* de h et de n.

En effet la probabilité de tirer blanc à la $n+1$-ième épreuve après avoir obtenu ν boules blanches en n épreuves est la probabilité composée

$$(4) \qquad P(\nu)\cdot\frac{a+\nu h}{m+nh}$$

enfin la probabilité totale de tirer blanc quels que soient les résultats précédents est égale à la somme des probabilités (4) pour toutes les valeurs possibles de $\nu=0, 1, 2, \ldots n$. On a donc

$$P=\frac{a}{m}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{-\beta-1}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}}{\binom{-\mu-1}{n}}.$$

Comme la somme en facteur est égale à l'unité d'après une formule connue de Cauchy, il résulte que $P=a/m$.

La fonction génératrice $G(x)$ de la probabilité (3) peut s'exprimer à l'aide de la fonction hypergéométrique de Gauss

$$(5) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\binom{-\alpha}{\nu}\binom{-\beta}{\nu}}{\binom{-\gamma}{\nu}}x^{\nu}.$$

En effet

$$(6)\qquad G(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu)\,x^{\nu}=\frac{\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{-\mu}{n}}\,F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

On peut faire varier ν de zéro à ∞ au lieu de 0 à n, car si $\nu>n$ on a $\binom{-\alpha}{\nu}=0$ et d'après la formule (3) $P(\nu)=0$.

La somme des probabilités (3) pour toutes les valeurs de ν étant équivalente à la certitude doit être égale à l'unité.

De (6) on conclut que cette somme est aussi égale à $G(1)$. En y posant $x=1$, on obtient la formule connue

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\binom{-\mu}{n}}{\binom{\beta-\mu}{n}}=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Donc la fonction *génératrice* de la probabilité (1) s'écrit

$$(7)\qquad G(x)=\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,1)}.$$

Comme dans le cas considéré $\alpha=-n$ est un entier négatif, $G(x)$ est un polynome. Les termes de l'expression (5) ont toujours une valeur finie sauf pour des valeurs négatives entières de γ telles que $\nu>-\gamma$. On peut montrer sans difficulté que les termes de $G(x)$ sont finis même pour ces valeurs de γ.

Faisant appel à la fonction génératrice (7), on peut déterminer les moments de la probabilité (1). Définissons le *moment factoriel* de degré s par

$$\mathfrak{M}_s=\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-s+1)\,P(\nu).$$

On a donc $\mathfrak{M}_0=G(1)=1$. De plus de (6) on tire

$$\mathfrak{M}_s=[x^s D^{(s)}\,G(x)]_{x=1}.$$

Or la fonction $G(x)$ satisfait à l'équation différentielle hypergéométrique

$$(8)\qquad x(1-x)D^{(2)}G(x)+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\,DG(x)-\alpha\beta\,G(x)=0.$$

En posant $x=1$, on trouve

$$\mathfrak{M}_1=D\,G(1)=\frac{\alpha\beta}{\gamma-\alpha-\beta-1}=-\frac{\alpha\beta}{\mu}=\frac{na}{m}.$$

Il est remarquable que cette grandeur est indépendante de h.

Si l'on prend $s-1$ fois la dérivée de (8) par rapport à x et si l'on pose $x=1$, on a

(9) $$\mathfrak{M}_s = D^{(s)}\, G(1) = s!\, \frac{\binom{-\alpha}{s}\binom{-\beta}{s}}{\binom{\gamma-\alpha-\beta-1}{s}} = \frac{\binom{n}{s}\binom{-\beta}{s}}{\binom{-\mu}{s}}\, s!$$

Notons le cas particulier

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{n(n-1)\,a\,(a+h)}{m\,(m+h)}.$$

La formule (9) montre que les moments factoriels de degré supérieur à n sont nuls; cela découle du reste de la définition de ces moments. Par contre, les moments de puissance de degré quelconque seront généralement différents de zéro. Les moments factoriels sont donc plus pratiques.

On peut exprimer la moyenne σ^2 des carrés des écarts $\nu - \mathfrak{M}_1$ à l'aide des moments factoriels déterminés ci-dessus

(9′) $$\sigma^2 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_1^2.$$

De la formule (9) il résulte:

(10) $$\sigma^2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mu+1}\,(n+\mu-\beta-\mathfrak{M}_1).$$

Pour avoir la somme σ_B^2 des carrés des écarts du problème de Bernoulli correspondant il suffit poser dans (10) $h=0$; on trouve

(11) $$\sigma_B^2 = \mathfrak{M}_1\left(1-\frac{\mathfrak{M}_1}{n}\right).$$

En comparant les valeurs (10) et (11) lorsque h est négatif ou $\mu < -1$, on trouve

$$\sigma_B^2 > \sigma^2$$

puisque cette inégalité peut se réduire alors à $n > 1$. Par contre lorsque h est positif, il vient pareillement $\sigma^2 > \sigma_B^2$.

Comme la fonction hypergéométrique ne contient que trois paramètres disponibles, trois moments seront seulement indépendants, par suite on pourra calculer tous les autres moments en fonction de $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$.

Inversement lorsque les moments factoriels $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$ d'une fonction de fréquence statistique sont donnés, on peut déterminer à l'aide des formules (9) une fonction hypergéométrique admettant ces mêmes moments. On obtiendra ainsi une représentation conforme au principe des moments. Lorsque $\mathfrak{M}_0 = 1$ on trouve

(12) $$\mu = \frac{2\,(\mathfrak{M}_2^2 - \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)}{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1^2\mathfrak{M}_2 - 2\mathfrak{M}_2^2}.$$

Si cette quantité est plus grande que zéro, on conclut que $h > 0$; inversement de $\mu < 0$ il suit $h < 0$.

Si le dénominateur de l'expression (12) est nul, il résulte $\mu = \infty$, et $h = 0$; c.-à-d. la répartition correspond à celle du problème de Bernoulli. Dans ce cas on n'a que deux constantes disponibles, il n'y a que deux moments indépendants. On peut vérifier facilement que le dénominateur de (12) égalé à zéro donne précisément la relation qui existe entre les trois premiers moments.

Dans le cas général, les formules (9) conduisent à l'équation du second degré

$$z^2 \mathfrak{M}_1 - z[\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mu(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1^2)] - \mu \mathfrak{M}_1^2 = 0 \tag{13}$$

dont les racines sont n et $-\beta$.

Si $\mu > 0$, l'une des racines de l'équation est positive, l'autre négative; la première est égale à n, la seconde à $-\beta$; par suite β sera aussi plus grand que zéro.

Si $\mu < 0$, les deux racines de (13) sont positives, donc β sera négatif; on pourra prendre pour n l'une quelconque des racines, les formules étant symétriques par rapport à n et $-\beta$. On aura donc deux représentations également acceptables. On devra nécessairement avoir $n \leqq -\mu$ et $-\beta \leqq -\mu$.

On détermine ensuite $a = \beta h$ et $m = \mu h$; on disposera de h de manière que a et m soient au moins approximativement des entiers positifs.

§ 2. La probabilité pour que dans les conditions du § 1, le nombre des cas favorables ne dépasse pas λ en n épreuves, s'obtient en faisant la somme des probabilités $P(\nu)$ de la formule (2) du § 1.

$$\mathfrak{P}(n, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) = \frac{1}{\binom{-\mu}{n}} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{-\beta}{\nu} \binom{\beta - \mu}{n - \nu}.$$

§ 3. Supposons que l'on ait $\mu - 1$ urnes contenant $m = \mu h$ boules dont $a = \beta h$ blanches; h est positif et β prend les valeurs $1, 2, \ldots, (\mu - 1)$. On choisit une urne, puis dans les conditions du § 1 on fait n tirages, et l'on demande la probabilité pour obtenir ν boules blanches.

La probabilité de choisir une urne contenant $a = \beta h$ boules blanches est $1/(\mu - 1)$; la probabilité d'obtenir de cette urne ν blancs en n épreuves est donnée par la formule (2) du § 1; enfin la probabilité totale d'obtenir ν blancs en n épreuves quelle que soit l'urne choisie est

$$P = \frac{1}{(\mu-1)\binom{-\mu}{n}} \sum_{\beta=1}^{\mu-1} \binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}. \tag{1}$$

Pour déterminer d'abord la somme indéfinie correspondant à la somme du second membre, écrivons-la sous la forme

$$\sum (-1)^\nu \binom{\beta-\mu}{n-\nu}\binom{\beta+\nu-1}{\nu};$$

la sommation successive par parties, effectuée en prenant $n-\nu$ fois la différence du premier facteur et en sommant le second, conduit à l'expression

$$\sum_{x=\nu+1}^{n+1} (-1)^{x+1} \binom{\beta+x-2}{x}\binom{\beta-\mu}{n+1-x}. \tag{2}$$

Il faut encore déterminer, comme dans le cas des intégrales définies les valeurs de (2) aux limites de la variable β. Conformément aux régles du calcul des différences finies, il faut prendre $\beta=\mu$ comme limite supérieure et $\beta=1$ comme limite inférieure de la somme (1).

Pour $\beta=\mu$, le terme non nul de (2) est celui dans lequel $x=n+1$; on aura donc à cette limite

$$(-1)^n \binom{\mu+n-1}{n+1} = -\binom{1-\mu}{n+1}.$$

A la limite inférieure $\beta=1$, tous les termes de (2) sont nuls; donc la probabilité (1) est

$$P = 1/(n+1); \tag{3}$$

il est à remarquer qu'elle est indépendante de ν, de h et de μ.

Lorsque $h<0$, le nombre des urnes est $(-\mu-1)$ et ces urnes contiennent $a=\beta h$ boules blanches où $-\beta$ prend les valeurs $1, 2, \ldots, (-\mu-1)$. On peut montrer de la même manière que précédemment, qu'en choisissant une urne, puis en tirant successivement comme au § 1, la probabilité pour obtenir ν boules blanches quelle que soit l'urne choisie, est encore égale à la probabilité (3).

§ 4. *Probabilité des causes.* Une urne contient m boules blanches ou noires en proportion inconnue. On a obtenu en n épreuves dans les conditions du § 1, ν boules blanches et $n-\nu$ boules noires. On suppose d'abord $h>0$ et l'on demande la probabilité Δp pour que l'urne contienne $a=\beta h$ boules blanches, en supposant les valeurs de $\beta=1, 2, 3, \ldots, (\mu-1)$ également probables.

En partant de la formule (2) du § 1, le théorème de Bayes conduit à

(1) $$\Delta \mathfrak{p}=\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}\Big/\sum_{s=1}^{\mu}\binom{-s}{\nu}\binom{s-\mu}{n-\nu}.$$

On a vu au § 3 que la somme au dénominateur est égale à $-\binom{1-\mu}{n+1}$; par suite on aura

(2) $$\Delta \mathfrak{p}=\frac{-\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}}{\binom{1-\mu}{n+1}}.$$

De la probabilité (2) on peut déduire la probabilité pour que le nombre a des boules blanches contenues dans l'urne au début ne dépasse pas τh. Il suffit de faire la somme des probabilités (2) β variant de 1 à τ.

(3) $$\mathfrak{p}=\frac{-1}{\binom{1-\mu}{n+1}}\sum_{\beta=1}^{\tau}\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}.$$

h étant positif, nous avons vu que la somme indéfinie au second membre de (3) est donnée par la formule (2) du § 3; et la somme définie est obtenue en y posant aux limites $\beta=\tau+1$ et $\beta=1$, donc cette probabilité est égale à

(4) $$\mathfrak{p}=\sum_{x=\nu+1}^{n+1}\binom{-\tau}{x}\binom{\tau+1-\mu}{n+1-x}\Big/\binom{1-\mu}{n+1}.$$

Lorsque $h<0$, on a aussi $\mu<0$ et $\beta<0$; la probabilité pour que le nombre a des boules blanches soit égale à βh est encore donnée par la formule (1) mais dans ce cas la somme au dénominateur est $\binom{1-\mu}{n+1}$. La probabilité pour que a ne dépasse pas τh s'exprime par une somme analogue à (3) où β variera de 1 à $-\tau$.

Une méthode semblable à celle suivie dans le cas de $h>0$ conduit au résultat suivant, si $h<0$

(5) $$\mathfrak{p}=\sum_{x=\nu+1}^{n+1}\binom{1-\tau}{x}\binom{\tau-\mu}{n+1-x}\Big/\binom{1-\mu}{n+1}.$$

Des formules (4) et (5) on déduit le *théorème* suivant:

1. $h>0$. Ayant obtenu en n épreuves, dans les conditions du § 1, ν boules blanches d'une urne contenant $m=\mu h$ boules

blanches et noires en proportion inconnue, la probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules blanches contenues dans l'urne ne dépasse pas $a = \tau h$ (en considérant comme également probables les compositions contenant $h, 2h, 3h, \ldots, (\mu-1)h$ boules blanches) est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules blanches obtenues en $n+1$ épreuves, dans les conditions du § 1, d'une urne qui contient au début $m-h$ boules dont a blanches, soit plus grand que ν.

2. $h<0$. On a obtenu en n épreuves, dans les conditions du § 1, ν boules blanches d'une urne qui contient $m=\mu h$ boules blanches et noires en proportion inconnue. On considère les compositions contenant $-h, -2h, \ldots, (-\mu+1)h$ boules blanches comme également probables. La probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules blanches contenues dans l'urne ne dépasse pas $a=\tau h$ est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules blanches obtenues en $n+1$ épreuves d'une urne contenant au début $m-h$ boules dont $a-h$ blanches, soit plus grand que ν.

§ 5. *Second problème.* Une urne contient m boules dont a blanches. On tire une boule, si elle est blanche la partie est terminée. Si elle est noire on rajoute à l'urne $h+1$ boules noires (h étant un entier positif, négatif ou zéro) et l'on tire de nouveau. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche, la partie est alors terminée.

On demande la probabilité pour que blanc ne sorte qu'au ν-ième coup.[3]) On trouve pour cette probabilité

$$(1) \quad P(\nu) = \frac{(m-a)(m-a+h)(m-a+2h)\ldots(m-a+\nu h-2h)a}{m(m+h)(m+2h)\ldots(m+\nu h-h)}.$$

Supposons d'abord $h \neq 0$ et posons pour simplifier $m/h=\mu$, $a/h=\omega$. La probabilité (1) devient

$$(2) \quad P(\nu) = \frac{\omega\binom{\mu-\omega+\nu-2}{\nu}}{(\mu-\omega-1)\binom{\mu+\nu-1}{\nu}} = \frac{\omega}{(\mu-\omega-1)} \frac{(-1)^\nu\binom{\omega+1-\mu}{\nu}\binom{-1}{\nu}}{\binom{-\mu}{\nu}}.$$

Il en résulte qu'en posant $\alpha=\mu-\omega-1$, $\beta=1$ et $\gamma=\mu$, on peut exprimer la fonction génératrice $G(x)$ de cette probabi-

[3]) Ce problème est la généralisation du célèbre problème de Saint-Pétersbourg. J'y ai été conduit en réfléchissant sur une question de physique mathématique que M. E. Bródy avait posée.

lité à l'aide de la fonction hypergéométrique

(3) $$G(x) = \frac{\omega}{\mu - \omega - 1}\,[F(\alpha, \beta, \gamma, x) - 1].$$

La somme des probabilités (2), si ν varie de un à ∞, devant être égale à l'unité, de (3) il résulte:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\mu - 1}{\omega}$$

conformément à la formule du § 1.

Par suite la fonction génératrice peut s'écrire

(4) $$G(x) = \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x) - 1}{F(\alpha, \beta, \gamma, 1) - 1}.$$

Le moment factoriel de degré s sera d'après la formule (9) du § 1

(5) $$\mathfrak{M}_s = \frac{\mu - 1}{\mu - \omega - 1}\,\frac{(-1)^s\binom{\omega + 1 - \mu}{s}}{\binom{-\mu}{s}}$$

et, en particulier, $\mathfrak{M}_0 = 1$, $\mathfrak{M}_1 = \frac{\mu - 1}{\omega - 1}$, $\mathfrak{M}_2 = \frac{2(\mu - 1)(\mu - \omega)}{(\omega - 1)(\omega - 2)}$.

D'après la formule (9′) du § 1 la somme σ^2 des carrés des écarts $\nu - \mathfrak{M}_1$ est

(6) $$\sigma^2 = \frac{(\mu - \omega)(\mu - 1)\,\omega}{(\omega - 1)^2(\omega - 2)}.$$

Pour avoir la somme σ_B^2 des carrés des écarts correspondant au problème de Bernoulli c.-à-d. à $h = 0$, il suffit de déterminer la valeur de σ^2 à cette limite; on trouve

(7) $$\sigma_B^2 = \frac{(m - a)\,m}{a^2}.$$

En comparant les valeurs (6) et (7), on peut montrer que si $h < 0$, on a toujours $\sigma^2 < \sigma_B^2$.

Lorsque $h > 0$ et $a/m < 7/8$, on a $\sigma^2 > \sigma_B^2$; par contre lorsque $h > 0$ et $a/m \geqq 7/8$, σ^2 peut dans certains cas particuliers être plus petit que σ_B^2.

Inversement si les moments factoriels $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ des observations statistiques correspondant au problème sont donnés, on peut déterminer à l'aide des formules (5) les grandeurs μ et ω de la représentation hypergéométrique:

$$\mu = 1 + \frac{\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_1(1 - \mathfrak{M}_1)}$$

$$\omega = 1 + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_1(1 - \mathfrak{M}_1)}.$$

Lorsque le dénominateur est nul, il résulte des formules précédentes que $h=0$.

μ et ω auront toujours le même signe que h. On disposera de h de manière que $m=\mu h$ et $a=\omega h$ soient des entiers, du moins approximativement.

II. Problèmes à plusieurs variables.

§ 6. Une urne contient b_1 boules marquées 1, b_2 boules marquées 2, et ainsi de suite, enfin b_{k+1} boules marquées $k+1$. Soit $b_1+b_2+\ldots+b_{k+1}=m$.

On tire une boule puis on rajoute à l'urne $h+1$ boules marquées du même numéro que la boule sortie. On répète l'opération n fois et l'on demande la probabilité d'obtenir en n épreuves ν_1 numéros 1, ν_2 numéros 2, ... et ν_{k+1} numéros $k+1$. Comme on doit avoir $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots+\nu_{k+1}=n$, le problème est à k variables indépendantes. On peut le traîter dans le cas général à l'aide de la fonction hypergéométrique F_D de M. Lauricella; lorsque $k=2$ cette fonction se réduit à la fonction hypergéométrique F_1 de M. Appell.[4])

Le cas $h=0$ correspond au problème à k variables des épreuves répétées de Bernoulli. Le cas $h=-1$ est aussi remarquable: on tire succesivement n boules sans rien remettre ou on les tire en même temps.

Pour que la probabilité demandée soit différente de zéro, il faut avoir $b_i>-(\nu_i-1)h$; si cette condition est satisfaite, on se sert du théorème des probabilités composées, et on obtient pour la probabilité cherchée

$$(1)\quad P(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k)=\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_{k+1}!}\,\frac{\prod\limits_{i=1}^{k+1} b_i(b_i+h)\ldots(b_i+\nu_i h-h)}{m(m+h)\ldots(m+nh-h)}.$$

En supposant $h\neq 0$ on peut écrire pour simplifier $\beta_i=b_i/h$ et $\mu=m/h$, alors la probabilité (1) devient

$$(2)\qquad P(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k)=\frac{1}{\binom{-\mu}{n}}\prod_{i=1}^{k+1}\binom{-\beta_i}{\nu_i}.$$

De la formule (2) on déduit que la probabilité totale de tirer une boule marquée i au $n+1$-ième coup est indépendante

4) P. Appell et J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Paris, 1926.

de h et de n. En effet la probabilité de tirer le numéro i à cette épreuve, après avoir obtenu en n épreuves ν_1 numéros 1, ν_2 numéros $2, \ldots, \nu_{k+1}$ numéros $k+1$ est

$$P(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)\, \frac{b_i + \nu_i h}{m+nh}$$

enfin la probabilité totale de tirer i, quelles que soient les gandeurs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k+1}$ obtenues, est la somme des probabilités pour toutes les valeurs possibles de $\nu_1, \ldots, \nu_{k+1}$, c.-à-d.

$$P = \frac{b_i}{m\binom{-\mu-1}{n}} \sum \ldots \sum \binom{-\beta_i - 1}{\nu_i} \binom{-\beta_1}{\nu_1} \ldots \binom{-\beta_{k+1}}{\nu_{k+1}}$$

Comme la somme en facteur est égale à $\binom{-\mu-1}{n}$ d'après une formule connue de Cauchy, on a $P = b_i/m$.

On peut écrire le dernier facteur de la probabilité (2) de la manière suivante

$$\binom{-\beta_{k+1}}{\nu_{k+1}} = (-1)^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k} \frac{\binom{-\beta_{k+1}}{n}\binom{n}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\binom{\beta_{k+1}+n-1}{\nu_1+\ldots+\nu_k}};$$

par suite en posant $\alpha = -n$ et $\gamma = \beta_{k+1} - n + 1$, cette probabilité devient

$$(3)\quad P(\nu_1, \ldots, \nu_k) = \frac{\binom{-\beta_{k+1}}{n}}{\binom{-\mu}{n}} (-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k} \frac{\binom{-\alpha}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\binom{-\gamma}{\nu_1+\ldots+\nu_k}} \prod_{i=1}^{k} \binom{-\beta_i}{\nu_i}.$$

La fonction hypergéométrique F_D est définie par l'équation suivante.[5])

$$(4)\quad F_D(x_1, \ldots, x_k) = \\ = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{\nu_k=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k} \frac{\binom{-\alpha}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\binom{-\gamma}{\nu_1+\ldots+\nu_k}} \prod_{i=1}^{k} \binom{-\beta_i}{\nu_i} x_i^{\nu_i}$$

Il en résulte que l'on peut exprimer la fonction génératrice de la probabilité (3) à l'aide de cette fonction

$$(5)\quad \begin{aligned} G(x_1, \ldots, x_k) &= \sum \ldots \sum P(\nu_1, \ldots, \nu_k)\, x_1^{\nu_1} \ldots x_k^{\nu_k} = \\ &= \frac{\binom{-\beta_{k+1}}{n}}{\binom{-\mu}{n}} F_D(x_1, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

---

[5]) Voir loc. cit. p. 115; elle se réduit pour $k=2$ à la fonction F_1 de M. Appell, p. 14.

On peut faire varier ν_i de zéro à ∞ au lieu de zéro à n car $P(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ est nulle lorsque $\nu_i > n$.

La somme des probabilités (3) prise pour toutes les valeurs possibles de ν_i est équivalente à la certitude, donc égale à l'unité; par suite en posant dans (5) $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ on doit avoir $G(1, \ldots, 1) = 1$ ou

$$F_D(1, \ldots, 1) = \frac{\binom{-\mu}{n}}{\binom{-\beta_{k+1}}{n}}$$

conformément à la formule donnée par M. Appell (p. 117).

La fonction génératrice de la probabilité cherchée sera donc

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \frac{F_D(x_1, \ldots, x_k)}{F_D(1, \ldots, 1)}. \tag{6}$$

Le moment factoriel de degré c_1 en ν_1, de degré c_2 en ν_2, de degré c_k en ν_k, si $s = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$, est donné par

$$\mathfrak{M}(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \left[\frac{\partial^s G(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{c_1} \partial x_2^{c_2} \ldots \partial x_k^{c_k}}\right]_{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1}. \tag{7}$$

Pour déterminer ces dérivées il faut remarquer que la fonction G satisfait aux équations aux dérivées partielles de F_D données par M. Appell (p. 117). On peut écrire ces équations sous la forme légèrement modifiée

$$(1 - x_i) \sum_{\mu=1}^{k} x_\mu \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_\mu} + \\ + [\gamma - (\alpha + 1) x_i] \frac{\partial G}{\partial x_i} - \beta_i \sum_{\mu=1}^{k} x_\mu \frac{\partial G}{\partial x_\mu} - \alpha \beta_i G = 0. \tag{8}$$

Ecrivons pour abréger

$$\mathfrak{S} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial G}{\partial x_\mu} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}' = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_\mu}.$$

Si l'on pose dans (8) $x_1 = \ldots = x_k = 1$ on obtient

$$(\gamma - \alpha - 1) \frac{\partial G}{\partial x_i} - \beta_i \mathfrak{S} - \alpha \beta_i = 0. \tag{9}$$

Dans les formules (9) à (18) les arguments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des fonctions $\frac{\partial G}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, et $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i}$ sont tous égaux à l'unité.

En faisant la somme de (9) pour $i=1, 2, \ldots, k$, on en tire

$$\mathfrak{S} = \frac{\alpha \Sigma \beta_i}{\gamma - \alpha - 1 - \Sigma \beta_i} = -\frac{\alpha}{\mu} \sum_{i=1}^{k} \beta_i ; \tag{10}$$

ensuite il vient de (9)

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = -\frac{\alpha \beta_i}{\mu} = \frac{n b_i}{m} \tag{11}$$

donc les moments factoriels du premier degré sont indépendants de h.

Prenons la dérivée de (8) par rapport à x_ν en supposant $\nu \neq i$ et posons $x_1 = \ldots = x_k = 1$; on trouve

$$(\gamma - \alpha - 1) \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_\nu} - \beta_i \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_\nu} - \alpha (\beta_i + 1) \frac{\partial G}{\partial x_\nu} = 0 \tag{12}$$

puis en prenant la dérivée de (8) par rapport à x_i et en posant $x_\mu = 1$

$$(\gamma - \alpha - 1) \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} - (\beta_i + 1) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i} - (\alpha + 1)(\beta_i + 1) \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0. \tag{13}$$

Faisons maintenant la somme des équations (13) et (12) pour toutes les valeurs de ν ; on a

$$(\gamma - \alpha - 2) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i} - (\alpha + 1) \frac{\partial G}{\partial x_i} - \beta_i \mathfrak{S}' - \beta_i (\alpha + 1) \mathfrak{S} = 0. \tag{14}$$

Enfin en sommant (14) pour $i = 1, 2, \ldots, k$, on obtient

$$\mathfrak{S}' = \frac{(\alpha + 1)(1 + \Sigma \beta_i) \mathfrak{S}}{\gamma - \alpha - 2 - \Sigma \beta_i} = \frac{\alpha (\alpha + 1) \Sigma \beta_i (\Sigma \beta_i + 1)}{\mu (\mu + 1)} \tag{15}$$

ce qui donne à l'aide de (14), de (10) et de (11)

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i} = \frac{\alpha (\alpha + 1)(\Sigma \beta_i + 1) \beta_i}{\mu (\mu + 1)}. \tag{16}$$

Les moments factoriels du second ordre sont obtenus de (12) à l'aide de (16) et de (11)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_\nu} = \frac{\alpha (\alpha + 1)}{\mu (\mu + 1)} \beta_i \beta_\nu = \frac{n (n - 1)}{m (m + h)} b_i b_\nu \tag{17}$$

et de (13) à l'aide de (16) et (11)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = \frac{\alpha (\alpha + 1)}{\mu (\mu + 1)} \beta_i (\beta_i + 1) = \frac{n (n - 1)}{m (m + h)} b_i (b_i + h). \tag{18}$$

On peut démontrer de même que le moment factoriel d'ordre s (7) est donné par

$$(19) \qquad \mathfrak{M}(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \frac{\binom{n}{s}}{\binom{-\mu}{s}} \prod_{i=1}^{k} \binom{-\beta_i}{c_i} c_i!\ ^{6)}$$

Pour abréger, désignons par ξ_i les moments factoriels (11) du premier ordre et du premier degré en ν_i, de plus par η_{vw} les moments factoriels (17) du premier degré en ν_v et du premier degré en ν_w; enfin désignons par η_{vv} le moment factoriel (18) du second degré en ν_v.

Appelons écart la quantité $\nu_i - \xi_i$ et soit σ_i^2 la moyenne des carrés de ces écarts. En se servant d'une relation analogue à (9′) du § 1, les formules (11) et (18) donnent

$$(20) \qquad \sigma_i^2 = \frac{n b_i (m - b_i)(m + nh)}{m^2 (m + h)}.$$

Nous avons établi nos formules en supposant $h \neq 0$, néanmoins on peut montrer directement que les moments factoriels obtenus en posant dans (19) $h = 0$ sont identiques à ceux du problème de Bernoulli correspondant. Il résulte donc de (20) qu'en posant $h = 0$, on a

$$(21) \qquad \sigma_{iB}^2 = \frac{n b_1 (m - b_1)}{m^2};$$

en comparant (20) à (21), on voit que le signe de

$$\sigma_i^2 - \sigma_{iB}^2$$

est le meme que celui de h. On conclut que si h est plus petit que zéro, la somme des carrés des écarts sera plus petite que dans le problème correspondant de Bernoulli, et si $h > 0$, cette somme sera plus grande.

Inversement lorsque les k moments factoriels du premier ordre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ et deux des moments du second ordre (par exemple η_{vv} et η_{vw}) d'une fonction de fréquence statistique sont

---

6) Dans le cas $k = 2$, les dérivées partielles de F_1 sont données par la formule de M. Appell (loc. cit. p. 19) qui devient pour $x_1 = x_2 = 1$

$$\frac{\partial^s F_1}{\partial x_1^{c_1} \partial x_2^{c_2}} = \binom{-\alpha}{s} \binom{-\beta_1}{c_1} \binom{-\beta_2}{c_2} c_1!\, c_2!\, s!\, \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma \quad \beta_1 - \beta_2 - s)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2)}$$

où $c_1 + c_2 = s$. Pour obtenir les dérivées de $G(x_1, x_2)$ il faut encore diviser cette quantité par $F_1(1, 1)$. (loc. cit. p. 22.) En remarquant que $\gamma - \alpha - \beta_1 - \beta_2 - 1 = \mu$ on trouve immédiatement

$$\mathfrak{M}(c_1, c_2) = \frac{c_1!\, c_2!}{\binom{-\mu}{s}} \binom{-\alpha}{s} \binom{-\beta_1}{c_1} \binom{-\beta_2}{c_2}$$

conformément à la formule (19).

donnés, on peut déterminer à l'aide des formules (19) une fonction hypergéométrique à k variables admettant les moments donnés et l'on pourra voir si les probabilités tirées de cette fonction représentent bien la répartition statistique en question.

Pour résoudre le problème, on choisira les variables de manière à avoir $\mathfrak{M}(0, 0, \ldots, 0) = 1$. De la formule (11) on tire

$$\frac{\mu}{n} = \frac{\beta_1}{\xi_1} = \frac{\beta_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{\beta_k}{\xi_k};$$

de (18) il suit pour toutes les valeurs de v et w

$$\frac{\mu(\mu+1)}{n(n-1)} = \frac{\beta_v \beta_w}{\eta_{vw}}$$

et de (19)

$$\frac{\mu(\mu+1)}{n(n-1)} = \frac{\beta_1(\beta_1+1)}{\eta_{11}} = \frac{\beta_2(\beta_2+1)}{\eta_{22}} = \ldots = \frac{\beta_k(\beta_k+1)}{\eta_{kk}}.$$

Le résolution de ces équations donne

$$\beta_i = \frac{\xi_i \eta_{vw}}{\eta_{vv}\xi_w - \eta_{vw}\xi_v} \tag{22}$$

$$n = \frac{\xi_v \xi_w + \eta_{vv}\xi_w - \eta_{vw}\xi_v}{\xi_v \xi_w - \eta_{vw}} \tag{23}$$

$$\mu = \frac{n\beta_i}{\xi_i}. \tag{24}$$

Le signe de β_i est celui du dénominateur de (22); comme ce dernier est égal à $\frac{n(n-1)}{m(m+h)}\xi_w h$, il résulte que le signe des β_i, et de μ est le même que celui de h.

Lorsque ce dénominateur est nul, la fonction de fréquence peut être représentée par le problème de Bernoulli à k variables. En effet, les moments correspondant à ce cas satisfont à la relation

$$\eta_{vv}\xi_w - \eta_{vw}\xi_v = 0$$

il résulte alors

$$n = \frac{\xi_v \xi_w}{\xi_v \xi_w - \eta_{vw}} \quad \text{et} \quad \frac{b_i}{m} = \frac{\xi_i}{n}$$

et la probabilité en question sera

$$P(\nu_1, \ldots \nu_k) = \frac{n!}{\nu_1! \ldots \nu_{k+1}!} \prod_{i=1}^{k+1} \left(\frac{b_i}{m}\right)^{\nu_i}.$$

§ 7. Étant donnés les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, la probabilité pour que dans le problème du § 6 on ait en même temps

$\nu_i < \lambda_i + 1$ pour toutes les valeurs $i = 1, 2, \ldots, k$, est donnée par la formule

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\binom{-\mu}{n}} \sum_{\nu_1=0}^{\lambda_1} \cdots \sum_{\nu_k=0}^{\lambda_k} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k} \prod_{i=1}^{k} \binom{-\beta_i}{\nu_i}.$$

§ 8. Considérons une urne contenant $b_1 = \beta_1 h$ boules marquées 1, $b_2 = \beta_2 h$ boules marquées 2, ..., $b_{k+1} = \beta_{k+1} h$ boules marquées $k+1$. Lorsque les grandeurs β_i peuvent prendre les valeurs $1, 2, 3, \ldots$ compatibles avec $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k+1} = \mu$, on obtient $\binom{\mu-1}{k}$ urnes différentes (d'après la formule de Monmort-Moivre), nous les considérons comme également probables.

On choisit une urne puis dans les conditions du § 6 on fait n tirages et l'on demande la probabilité d'obtenir ν_1 numéros 1, ν_2 numéros 2, ..., ν_k numéros k. Elle est déduite de la formule (2) du § 6

$$P(\nu_1 \ldots \nu_k) = \frac{1}{\binom{\mu-1}{k}\binom{-\mu}{n}} \sum_{\beta_1} \sum_{\beta_2} \cdots \sum_{\beta_k} \binom{-\beta_1}{\nu_1} \cdots \binom{-\beta_k}{\nu_k} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k}$$

où β_i varie de 1 à $\mu - \beta_1 - \ldots - \beta_{i-1} - k - 1 + i$. D'après le § 3 la sommation par rapport à β_k donne

$$\sum_{\beta_k} \binom{-\beta_k}{\nu} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k} = -\binom{1 + \beta_1 - \ldots - \beta_{k-1} - \mu}{1 + n - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-1}};$$

cela étant, la somme par rapport à β_{k-1} sera

$$-\sum_{\beta_{k-1}} \binom{-\beta_{k-1}}{\nu_{k-1}} \binom{1 + \beta_1 + \ldots + \beta_{k-1} - \mu}{1 + n - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-1}} = \binom{2 + \beta_1 + \ldots + \beta_{k-2} - \mu}{2 + n - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-2}};$$

en continuant de la même manière on trouve que la somme en facteur de la probabilité cherchée est égale à

$$(-1)^k \binom{k-\mu}{k+n}$$

et enfin

$$P(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}.$$

Il faut remarquer que cette probabilité est indépendante de h, de μ et des ν_i.

Dans le cas de $h < 0$, le nombre des urnes également possibles est $\binom{-\mu-1}{k}$; les quantités $-\beta_i$ prennent les valeurs $1, 2, \ldots, (-\mu-1)$ et l'on est conduit à la même formule que dans le cas de $h > 0$.

§ 9. *Probabilité des causes.* Une urne contient m boules marquées 1, ou 2 ou 3, ... ou $k+1$, en proportion inconnue. h étant positif, on a obtenu en n épreuves ν_1 boules marquées 1, ν_2 boules marquées 2, ... ν_k boules marquées k.

On demande la probabilité pour que l'urne contienne au début $b_i = \beta_i h$ boules marquées i pour $i = 1, 2, 3, \ldots (k+1)$, lorsque l'on considère les valeurs $\beta_i = 1, 2, 3, \ldots (\mu - 1)$ comme également probables pourvu que l'on ait $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k+1} =$.

Le théorème de Bayes appliqué à la formule (2) du § 6 donne

$$(1)\quad p(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \frac{1}{\binom{k-\mu}{k+n}} \binom{-\beta_1}{\nu_1}\binom{-\beta_2}{\nu_2} \cdots \binom{-\beta_k}{\nu_k}\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k}.$$

En effet d'après le § 8, la somme de ces probabilités dans les conditions ci-dessus est égale à l'unité.

De la probabilité (1) on déduit la probabilité $\mathfrak{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$ pour que l'on ait en même temps $\beta_i \leqq \tau_i$ pour $i = 1, \ldots k$.

$$(2)\qquad \mathfrak{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) = \sum_{\beta_1 = 1}^{\tau_1} \ldots \sum_{\beta_k = 1}^{\tau_k} p(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k).$$

Le § 3 donne la somme indéfinie

$$\sum_{\beta_k} \binom{-\beta_k}{\nu_k}\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k} =$$

$$= \sum_{x_k} (-1)^{x_k+1} \binom{\beta_k + x_k - 2}{x_k}\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_{k-1} - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k - x_k}$$

la limite inférieure de x_k étant $\nu_k + 1$ et la limite supérieure $n + 1 - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-1}$. Pour obtenir la somme définie il suffit de remplacer β_k par $\tau_k + 1$, car à la limite inférieure $\beta_k = 1$ cette expression est nulle. Il résulte donc pour la somme définie

$$\sum_{x_k} \binom{-\tau_k}{x_k}\binom{1 + \beta_1 + \ldots + \beta_k - \tau_k - \mu}{n + 1 - \nu_1 - \ldots - \nu_k - x_k}$$

On continue la sommation par rapport à β_{k-1}, puis $\beta_{k-1}, \ldots$ et β_1. On se sert de la même formule. En supposant que les τ_i sont indépendants des β on arrive à la probabilité cherchée:

$$(3)\quad \mathfrak{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) =$$

$$= \frac{1}{\binom{k-\mu}{k+n}} \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_k} \binom{-\tau_1}{x_1} \cdots \binom{-\tau_k}{x_k}\binom{k + \tau_1 + \ldots + \tau_k - \mu}{k + n - x_1 - \ldots - x_k}$$

x_s variant de $\nu_s + 1$ à $n + 1 + k - \nu_1 - \ldots - \nu_{s-1} - s$.

Conclusions. 1. $h > 0$. On a obtenu, dans les conditions du § 6, en n épreuves ν_i boules marquées i (où $i = 1, 2, \ldots, k+1$) d'une urne contenant $m = \mu h$ boules numérotées de 1 à $k+1$ en proportion inconnue. On considère les compositions contenant h, $2h, \ldots, (\mu - k) h$ boules marquées i (où $i = 1, 2, \ldots, k+1$) comme également probables pourvu que l'on ait $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k+1} = \mu$.

La probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules marquées i, contenues dans l'urne ne dépasse pas $b_i = \beta_i h$ (où $i = 1, 2, \ldots, k$) est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules marqués i, obtenues en $n+k$ épreuves, dans les conditions du § 6, d'une urne contenant au début $m - kh$ boules dont $b_i = \beta_i h$ boules marquées i, dépasse ν_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

2. $h < 0$. On a obtenu dans les conditions du § 6 en n épreuves ν_i boules marquées i d'une urne contenant $m = \mu h$ boules numérotées de 1 à $k+1$ en proportion inconnue. On considère les compositions contenant $-h, -2h, \ldots, (-\mu + k) h$ boules marquées i comme également probables $(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k+1} = \mu)$

La probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules marquées i, contenues dans l'urne ne dépasse pas $b_i = \beta_i h$ est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules marquées i, obtenues en $n+k$ épreuves, dans les conditions du § 6, d'une urne contenant au début $m - kh$ boules, dont $b_i - h$ boules marquées i, dépasse ν_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

(Reçu le 23 mai 1927)

Über asymptotische Entwicklungen der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_\alpha(x)$.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

Einleitung.

Die MITTAG-LEFFLERsche Funktion

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \qquad (\Re(\alpha) > 0)$$

spielt eine wichtige Rolle bei der Herstellung in möglichst ausgedehnten Bereichen konvergierender Ausdrücke für analytische Funktionen. Die Eigenschaften dieser Funktion sind aber auch an sich interessant. Wir werden uns mit den asymptotischen Entwicklungen von $E_\alpha(x)$ beschäftigen. Wenn α reell ist, so pflegt man das Verhalten dieser Funktion längs vom Nullpunkte ausgehender Strahlen zu untersuchen, um für grosses $|x|$ einfache Formeln zu entwickeln.[1]) Wenn aber α komplex ist, so muss man statt Halbstrahlen logarithmische Spiralen wählen, um eine verhältnismässig einfache Näherungsformel zu gewinnen.[2]) Die vorliegende, auf Anregung von Herrn A. HAAR entstandene Arbeit hat den Zweck, durch Anwendung der allgemeinen Ergebnisse von Herrn A. HAAR über asymptotische Entwicklungen. die allgemeine Theorie der Funktion $E_\alpha(x)$ auf eine neue Art zu entwickeln.

[1]) Die asymptotische Entwicklung der Funktion $E_\alpha(x)$ ist vielfach behandelt; wir erwähnen nur die folgenden Arbeiten, wo die entsprechenden Resultate zuerst angegeben sind. G. MITTAG-LEFFLER, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, *Acta Mathematica*. tome 29., 1905, pag. 132—147. A. WIMAN, Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Mathematica*, Bd. 29., 1905, S. 191—201,

[2]) G. MITTAG-LEFFLER, Sopra la funzione $E_\alpha(x)$, *R. Accad. dei Lincei, Atti*. Ser. 5. Vol. 13, 1904, pag. 3—5.

Das Hauptresultat von Herrn HAAR besteht im Folgendem:[3]) Es sei $f(t)$ eine für alle positive Werte von t stetige Funktion, deren LAPLACEsche Transformierte

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = \varphi(z)$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Für alle Werte von $z = \sigma + iy$, für die $\sigma > a$ ausfällt, ist $\varphi(z) = \varphi(\sigma + iy)$ regulär und besitzt bei $y = \pm\infty$ für hinreichend grosse Werte von t den FOURIERschen *Charakter*. $\varphi(\sigma + iy)$ wird von Herrn HAAR bei $y = \pm\infty$ für hinreichend grosse t vom FOURIERschen Charakter genannt, wenn man zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine positive Grenze ω derart bestimmen kann, dass für alle $t \geqq T$

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{iyt} \varphi(\sigma + iy)\,dy \right| < \delta$$

ausfällt, sobald $\alpha \geqq \omega$ und $\beta \geqq \omega$ bzw. $\alpha \leqq -\omega$ und $\beta \leqq -\omega$ ist.

II. Ihre Randwerte gestatten auf der Geraden $\Re(z) = a$ eine Darstellung

$$\varphi(z) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{a_\varkappa}{(z - z_\varkappa)^{\varrho_\varkappa}} + \psi(z)$$

wobei $z_\varkappa = a + iy_\varkappa$ Punkte dieser Geraden sind, die Funktion $\psi(a + iy)$ aber eine n-mal differenzierbare Funktion von y bedeutet von der Beschaffenheit, dass $\left| \frac{d^n \psi(a + iy)}{dy^n} \right|$ in jedem endlichen Intervall von y beschränkt ist; die Ableitungen

$$\frac{d^k \varphi(a + iy)}{dy^k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

für $y = \pm\infty$ den Grenzwert Null haben, und $\frac{d^n \varphi(a + iy)}{dy^n}$ bei $y = \pm\infty$ für hinreichend grosse t den FOURIERschen Charakter besitzt.

III. Für hinreichend grosse Werte von t gelten die Gleichungen

$$\lim_{\omega = \infty} \int_{a+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zt} \varphi(z)\,dz = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\omega = \infty} \int_{a-i\omega}^{\sigma-i\omega} e^{zt} \varphi(z)\,dz = 0.$$

[3]) A. HAAR, Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen, *Math. Annalen*, Bd. 96, 1926, S. 85.

Unter diesen Bedingungen gilt die asymptotische Formel

$$\lim_{t=\infty} t^n e^{-\alpha t}\left[f(t) - \sum_{\varkappa=1}^{u} \frac{a_\varkappa}{\Gamma(\varrho_\varkappa)} e^{z_\varkappa t} t^{\varrho_\varkappa - 1}\right] = 0.$$

Dieser Satz wird im Folgendem als Satz von HAAR zitiert.

Um diesen allgemeinen HAARschen Satz auf konkrete Fälle anwenden zu können, muss man die LAPLACEsche Transformierte der zur Untersuchung vorgelegten Funktion auf eine Form bringen, welche über die für den HAARschen Satz wesentlichen Momente Aufschluss gibt. Für die Funktion $E_\alpha(x)$ ist dies, in anderem Zusammenhange, von den Herren F. BERNSTEIN und G. DOETSCH in einer der inhaltsreichen Arbeiten, die diese Verfasser der LAPLACEschen Transformation widmeten, ausgeführt worden; sie erhalten nämlich durch Einführung einer geeigneten neuen Variablen für die LAPLACEsche Transformierte der Funktion $E_\alpha(x)$ eine explicite elementare Funktion, welche der HAARschen Methode unmittelbar zugänglich ist.

§ 1. Die asymptotischen Entwicklungen im Falle $\alpha > 0$.

In diesem Falle interessiert uns das asymptotische Verhalten der Funktion $E_\alpha(x)$, wenn x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahles ins Unendliche rückt. Wir benötigen hier zuerst, um den Satz von HAAR anwenden zu können, die LAPLACEsche Transformierte von $E_\alpha(x)$. Dieselbe ist indessen keine elementare Funktion von z. Nimmt man aber statt $E_\alpha(x)$ die durch die Transformation $x = y^\alpha$ sich ergebende Funktion, so wird die LAPLACEsche Transformierte, wie die Herren F. BERNSTEIN und G. DOETSCH gefunden haben,[4] eine elementare Funktion, und zwar

$$\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - 1}.$$

Diese Funktion ist aber *mehrdeutig,* wir müssen daher genau feststellen, um welchen Zweig derselben es sich handelt. Zu dem Ende verfahren wir wie folgt. Wir führen durch die Relation

$$(1) \qquad x = (te^{i\varphi})^\alpha = t^\alpha e^{i\varphi\alpha}$$

an Stelle der komplexen Variablen x die reellen Variablen t und

[4]) F. BERNSTEIN und G. DOETSCH, Die Integralgleichungen der elliptischen Thetanullfunktion. *Göttinger Nachrichten,* 1922, S. 42.

Die Verfasser gewinnen $E_\alpha(x)$ als die VOLTERRAsche Transformierte der Funktion $L(E_\alpha(x))$.

φ ein, wobei $t > 0$ sein soll; wird dann φ fixiert und läuft t von 0 bis $+\infty$, so beschreibt x einen vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahl. Ist δ irgend eine relle Zahl, und nimmt φ alle Werte im Intervalle

$$-\frac{\pi}{\alpha}\delta \leqq \varphi < -\frac{\pi}{\alpha}\delta + \frac{2\pi}{\alpha} \tag{2}$$

an, so erhalten wir auf diese Weise alle die vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahlen der x-Ebene. Wird also

$$E_\alpha(x) = f_\alpha(t, \varphi)$$

gesetzt, so handelt es sich um die Diskussion von $f_\alpha(t, \varphi)$, als Funktion von t betrachtet, für positive reelle Werte von t. Für die LAPLACEsche Transformierte von $f_\alpha(t, \varphi)$, als Funktion von t betrachtet, erhält man

$$L(f_\alpha(t, \varphi)) = \int_0^\infty f_\alpha(t, \varphi)\, e^{-zt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha n} dt. \tag{3}$$

In der Folge beschränken wir uns auf die Halbebene $\Re(z) > 0$. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha n} dt$$

ist daselbst konvergent und stellt dort eine reguläre Funktion von z dar; wir erkennen sogleich, dass dort

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha n} dt = \frac{1}{z^{\alpha n+1}} \Gamma(\alpha n + 1) \;[5] \tag{4}$$

gilt, wo die Potenz $z^{\alpha n+1}$ durch

$$z^{\alpha n+1} = (z^\alpha)^n . z, \quad z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \quad -\pi < \arg z < \pi \tag{5}$$

bestimmt ist. In der Tat, für reelle positive Werte von z fällt (4) mit einer bekannten EULERschen Formel zusammen, woraus die Gültigkeit von (4) in der Halbebene $\Re(z) > 0$ auf Grund des Satzes folgt, dass zwei in einem Gebiete reguläre Funktionen identisch sind, wenn sie für die Punkte einer im Innern des Gebiets sich häufenden Punktmenge die gleichen Werte haben. Die Formel (3) liefert demnach für $|z| > 1$

$$L(f_\alpha(t, \varphi)) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{z^{\alpha n}} = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}}, \tag{6}$$

[5] Diese Formel rührt von EULER her; vgl. N. NIELSEN: Handbuch der Theorie der Gammafunktion, S. 151.

wo der Wert der Potenz z^α durch (5) gegeben ist. Die Funktion

$$\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} \tag{6'}$$

ist in der Halbebene $\Re(z) \geqq 0$, in welcher sich unsere Betrachtungen abspielen werden, regulär bis auf $z=0$ und gewisse Stellen des Einheitskreises $|z|=1$; und zwar werden, unter Berücksichtigung von (5), diese Pole $z=e^{i\vartheta}$ erhalten, indem man die reelle ganze Zahl μ so bestimmt, dass für

$$\vartheta = \varphi + \frac{2\pi}{\alpha}\mu$$

die Bedingung

$$\left|\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

erfüllt sei. Es gibt offenbar nur endlich viele reelle ganze Zahlen μ, welche die Bedingung (7) erfüllen, mithin auch nur endlich viele Pole der Funktion (6') in $\Re(z) \geqq 0$. Diese Pole sind dabei einfach, wie aus

$$\lim_{z=e^{i\vartheta}} \left\{ \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}} \right\} = \frac{\alpha-1}{2\alpha e^{i\vartheta}}$$

$$\vartheta = \varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}$$

hervorgeht; diese Beziehung bestimmt gleichzeitig die zu diesen Polen gehörenden Hauptteile. Die Summe dieser Hauptteile ist daher

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{(\mu)} \frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}},$$

wo also μ alle reelle ganze Zahlen durchläuft, für welche die Bedingungen (7) erfüllt ist. Wenn man diese Summe aus (6') subtrahiert, so verschwinden die Singularitäten in der rechten Halbebene. Es wird also die Funktion

$$H_\alpha(z, \varphi) = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \sum_{(\mu)} \frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

regulär analytisch für $\Re(z) \geqq 0$, bis auf die Stelle $z=0$; die Bedeutung von z^α ist dabei durch (5) fixiert.

Es werde noch die durch unmittelbare Integration für

$$\Re(z) > \Re\left(\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right)$$

sich ergebende Formel

$$\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}=\int_0^\infty \exp\left\{t\left[\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}-z\right]\right\}dt$$

erwähnt, welche ausdrückt, dass

$$(8)\qquad L\left(\exp\left[t\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right]\right)=\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

ist. Wir betrachten jetzt, die Methode von Herrn HAAR anwendend, die Differenz

$$F_\alpha(t,\varphi)=f_\alpha(t,\varphi)-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{t\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right\}.$$

Die L-Transformierte von $F_\alpha(t,\varphi)$ wird nach (6) und (8)

$$L(F_\alpha(t,\varphi))=\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}=H_\alpha(z,\varphi).$$

Die Funktion $H_\alpha(z,\varphi)$ ist, wie oben bemerkt wurde, regulär analytisch für $\Re(z)\geqq 0$, bis auf die Stelle $z=0$. Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$H_\alpha(\sigma+iy,\varphi)$$
$$z=\sigma+iy$$

für $\sigma\geqq 0$ bei $y=\pm\infty$ den FOURIERschen Charakter besitzt. Für das erste Glied von $H_\alpha(\sigma+iy,\varphi)$ folgt

$$\int_\alpha^\beta e^{iyt}\frac{(\sigma+iy)^{\alpha-1}}{(\sigma+iy)^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}dy=\int_\alpha^\beta\left\{e^{iyt}\sum_{n=0}^\infty\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{(\sigma+iy)^{\alpha n+1}}\right\}dy=c_1$$

$$|c_1|\leqq\left|\int_\alpha^\beta\frac{e^{iyt}}{(\sigma+iy)}dy\right|+\left|\int_\alpha^\beta\frac{e^{iyt}}{(\sigma+iy)^{1+\alpha}}\left\{e^{i\varphi\alpha}+\sum_{n=2}^\infty\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{(\sigma+iy)^{\alpha(n-1)}}\right\}dy\right|;$$

wenn $|y|$ hinreichend gross ist, so gilt die Ungleichung

$$\left|e^{i\varphi\alpha}+\sum_{n=2}^\infty\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{(\sigma+iy)^{\alpha(n-1)}}\right|<c_2;$$

also gewinnt man durch Produktintegration die folgende Abschätzung

$$|c_1|<\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{|\sigma+i\beta|}+\frac{1}{|\sigma+i\alpha|}+\int_\alpha^\beta\frac{dy}{|\sigma+iy|^2}\right\}+c_2\int_\alpha^\beta\frac{dy}{|\sigma+iy|^{1+\alpha}}.$$

Der Nachweis, dass auch das Glied $\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{(\mu)}$ von $H_\alpha(z,\varphi)$ den FOURIERschen Charakter besitzt, gestaltet sich ähnlich. Noch einfacher beweist man, dass die k-te Ableitung von $H_\alpha(z,\varphi)$ auch dieselbe Eigenschaft besitzt, und zwar auf die folgende Weise:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{z^{\alpha n+1}}\right\}=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\varphi\alpha n}\frac{(\alpha n+1)\ldots(\alpha n+k)}{z^{\alpha n+k+1}}$$

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{iyt}H_\alpha^{(k)}(\sigma+iy)\,dy\right|=\left|\int_\alpha^\beta\frac{e^{iyt}}{(\sigma+iy)^{k+1}}c(y)\,dy\right|<c\int_\alpha^\beta\frac{dy}{|\sigma+iy|^{k+1}},$$

da $|c(y)|<c_8$ gilt, wenn nur $|y|$ hinreichend gross ist. Es folgt auch leicht, dass auch die Bedingung III erfüllt ist. Jetzt brauchen wir noch die Darstellung von $H_\alpha(z,\varphi)$ auf der Geraden $\Re(z)=0$. Nach der Formel

$$\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}=-\sum_{k=0}^{\nu}\frac{e^{-i\varphi\alpha(k+1)}}{z^{1-(k+1)\alpha}}+e^{-i\varphi\alpha(\nu+1)}\frac{z^{\alpha(\nu+2)-1}}{z^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}$$

und mit der Bezeichnung

$$\psi(z)=e^{-i\varphi\alpha(\nu+1)}\frac{z^{\alpha(\nu+2)-1}}{z^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

wird

$$H_\alpha(z,\varphi)=-\sum_{k=0}^{\nu}\frac{e^{-i\varphi\alpha(k+1)}}{z^{1-(k+1)\alpha}}+\psi(z).$$

Wir zeigen: die n-te Ableitung $\frac{d^n\psi(iy)}{dy^n}$ ist in jedem endlichen Intervall von y von beschränktem absolutem Betrage, wenn nur

(9) $$n\leqq[\alpha(\nu+2)-1]$$

ist. ([ ] bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leqq\alpha(\nu+2)-1$).

Der Nachweis ergibt sich durch vollständige Induktion. Der Betrag des Gliedes

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\frac{1}{(\sigma+iy)-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

wird sicher beschränkt, wenn für y ein genügend kleines den Nullpunkt enthaltendes Intervall gewählt wird, und dies gilt auch für die Ableitungen. Das erste Glied von $\psi(z)$ hat — vom konstanten Faktor $e^{-i\varphi\alpha(\nu+1)}$ abgesehen — die n-te Ableitung

(10) $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\alpha(\nu+2)-1}g(z)]=\sum_{k=0}^{n}a_k\,g^{(k)}(z)\,z^{\alpha(\nu+2)+k-(n+1)},$$

wo wir

$$g(z)=\frac{1}{z^{\alpha}-e^{i\varphi\alpha}}$$

gesetzt haben. Für die Ableitung $g^{(k)}(z)$ folgt aus der Formel

$$\frac{d^k}{dz^k}[g(z)(z^{\alpha}-e^{i\varphi\alpha})]=g^{(k)}(z)(z^{\alpha}-e^{i\varphi\alpha})+$$
$$+b_1 g^{(k-1)}(z)z^{\alpha-1}+\ldots+b_k g(z)z^{\alpha-k}=0$$

der Ausdruck:

$$g^{(k)}(z)=-g(z)\{b_1 g^{(k-1)}(z)z^{\alpha-1}+b_2 g^{(k-2)}(z)z^{\alpha-2}+\ldots+b_k g(z)z^{\alpha-k}\},$$

aus welchem (durch vollständige Induktion) ersichtlich ist, dass der Zähler von $g^{(k)}(z)$ in keinem Glied einen Faktor z^{λ} besitzt, für welchen $\lambda<-k$ ist. Hieraus folgt nach (10) und (9), dass der Zähler von $\frac{d^n}{dz^n}[z^{\alpha(\nu+2)-1}g(z)]$ in keinem Glied einen Faktor z^{λ} besitzt, für welchen $\lambda<0$ ist. Es sei noch bemerkt, dass $\psi^{(n)}(z)$ in jedem den Punkt $z=0$ nicht enthaltenden Intervall der imaginären Achse regulär, also $\left|\frac{d^n\psi(iy)}{dy^n}\right|$ beschränkt ist.

Wir können also den Satz von Haar anwenden. Derselbe liefert die Limesgleichung

$$\lim_{t=\infty} t^n\left[f_{\alpha}(t,\varphi)-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{t\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right\}+\sum_{k=1}^{\nu+1}\frac{e^{-i\varphi\alpha k}}{\Gamma(1-\alpha k)}\right]=0$$

woraus nach (1)

$$\lim x^{\frac{n}{\alpha}}\left[E_{\alpha}(x)-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{|x|^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{i\frac{\arg x+2\pi\mu}{\alpha}\right\}\right\}+\sum_{k=1}^{\nu+1}\frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)}\right]=0$$

folgt, *wenn nur x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt. Aber gemäss (9) ist $\left[\frac{n}{\alpha}\right]\leq\nu+1$, also gilt für jedes n die asymptotische Formel*

$$E_{\alpha}(x)=\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{|x|^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{i\frac{\arg x+2\pi\mu}{\alpha}\right\}\right\}-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]}\frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)}+x^{-\frac{n}{\alpha}}\varepsilon(x),$$
$$\varepsilon(x)\to 0$$

wo μ ganz und

$$\left|\frac{\arg x+2\pi\mu}{\alpha}\right|\leq\frac{\pi}{2}$$

ist. Dabei ist also, nach (1) *und* (2), $\arg x$ *durch*

$$-\pi\delta \leqq \arg x < -\pi\delta + 2\pi$$

eindeutig bestimmt.

Wir werden jetzt diese Formel für verschiedene Werte von α diskutieren. Es sei

$$\alpha \geqq 2.$$

In der Relation (2) bedeute δ in diesem Falle den Wert 1, also betrachten wir diejenigen φ, für welche die Bedingung $-\frac{\pi}{\alpha} \leqq \varphi < \frac{\pi}{\alpha}$, also $-\pi \leqq \arg x < \pi$, erfüllt ist. Es ist aber $\frac{\pi}{\alpha} \leqq \frac{\pi}{2}$, also wird $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$, so dass z. B. $\mu = 0$ der Bedingung (7) genügt. Die Summe $\sum\limits_{(\mu)}$ wird also im Falle $\alpha \geqq 2$ nie leer. Es sei nun

$$2 > \alpha > 0$$

und es bedeute δ den Wert $\frac{\alpha}{2}$; φ variiert also im Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$. Wir beschränken uns zunächst auf die Werte

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

somit nach (1) in der Ebene x auf die Weite

$$-\frac{\pi\alpha}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi\alpha}{2}. \tag{12}$$

Jetzt wird die Summe $\sum\limits_{(\mu)}$ im $H_\alpha(z, \varphi)$ nur das dem Werte $\mu = 0$ entsprechende Glied

$$\frac{1}{z - e^{i\varphi}}$$

enthalten, weil für positives μ, wegen $\alpha < 2$, nach (11) die Ungleichung

$$\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha} > \frac{\pi}{2}$$

folgt, was der Bedingung (7) nicht entspricht. Man schliesst ebenso, dass für $\mu < 0$ eine Ungleichung

$$\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha} < -\frac{\pi}{2}$$

besteht. Die Summe $\sum\limits_{(\mu)}$ wird aber leer, wenn die Werte von φ ausserhalb des Intervalles (11) in dem Intervalle

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\alpha\pi}{2} < \arg x < 2\pi - \frac{\pi\alpha}{2} \tag{13}$$

liegen, weil die Relation

$$\left|\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

zunächst für $\mu \geqq 0$ nicht gilt. Aber sie gilt auch für $\mu < 0$ nicht, da wenn ein $0 > \mu = -p,\ p \geqq 1$ der Relation genügte, so wäre

$$-\frac{\pi}{2} + \vartheta\pi = \varphi - \frac{2\pi}{\alpha} p, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

woraus

$$\varphi = \frac{2\pi}{\alpha} p - \frac{\pi}{2} + \vartheta\pi \geqq \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

folgen würde, aber dies ist offenbar unmöglich. *Also gestaltet sich die Darstellung im Falle* $2 > \alpha > 0$, *nach* (12) *und* (13), *auf die folgende Weise:*

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \exp x^{\frac{1}{\alpha}} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]} \frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)} + x^{-\frac{n}{\alpha}} \varepsilon(x)$$

für

$$-\frac{\pi\alpha}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi\alpha}{2};$$

$$E_\alpha(x) = -\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]} \frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)} + x^{-\frac{n}{\alpha}} \varepsilon(x)$$

für

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \arg x < 2\pi - \frac{\pi\alpha}{2},$$

wo

$$\varepsilon(x) \to 0$$

wenn nur x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahles ins Unendliche rückt.

§ 2. Die asymptotische Entwicklung im Falle $\alpha = a + ib$.

Man muss die Ungleichung $a > 0$ voraussetzen, damit $E_\alpha(x)$ eine ganze Funktion sei. Wir führen die Transformation

$$x = (te^{i\varphi})^\alpha, \quad (\alpha = a + ib) \tag{1'}$$

in dem Sinne

$$(t e^{i\varphi})^\alpha = e^{\alpha \log t}\, e^{i\varphi\alpha}$$

ein, wo $t > 0$, φ reell und $\log t$ reell sind. Somit ist wieder $x = (te^{i\varphi})^\alpha$ offenbar eine eindeutige Funktion des Wertepaares (t, φ) und es wird, wie im § 1.,

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}\, e^{i\varphi\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} = f_\alpha(t, \varphi),$$

wo wieder $f_\alpha(t, \varphi)$ als Funktion von $t > 0$ betrachtet wird. φ spielt die Rolle eines Parameters.

Man gewinnt für die L-Transformierte von $f_\alpha(t, \varphi)$ den Ausdruck

$$L(f_\alpha(t, \varphi)) = \int_0^\infty f_\alpha(t, \varphi)\, e^{-zt}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_0^\infty t^{\alpha n} e^{-zt}\, dt,$$

wo für das in der Summe stehende Integral die EULERsche Formel gilt

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, t^{\alpha n}\, dt = \frac{1}{z^{\alpha n+1}}\, \Gamma(\alpha n + 1),$$

(5′) $\quad (z^\alpha = e^{\alpha \log|z|}\, e^{i\alpha \arg z}, \; -\pi < \arg z < \pi, \; \log|z| \text{ reell})$

wenn man nur für solche Werte von z beschränkt, welche der Forderung $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ genügen. Beweis ist wie bei (4). Wir gelangen also zu derselben Formel wie im Falle eines reellen α:

$$L(f_\alpha(t, \varphi)) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{z^{\alpha n}} = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}},$$

wo der Wert der Potenz z^α durch (5′) gegeben ist. Diese Funktion besitzt in der rechten Halbebene einfache Pole. Es sei ζ ein Pol, so wird

$$\zeta^\alpha - e^{i\varphi\alpha} = 0,$$

woraus die Gleichungen

$$b \arg\zeta - a \log|\zeta| = b\varphi$$
$$a \arg\zeta + b \log|\zeta| = a\varphi + 2\pi\varkappa$$

folgen. Man gewinnt am denselben die Formeln

$$\arg\zeta = \varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2},$$

$$\log|\zeta| = \frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2},$$

also

$$\zeta = \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}$$

wird. Es folgt noch ebenso wie im § 1., dass diese Pole einfach sind und das Residuum $\frac{1}{\alpha}$ haben, also es wird die Funktion

$$(14)\quad G_\alpha(z,\varphi) = L(f_\alpha(\varphi,t)) - \frac{1}{\alpha}\sum_{(\varkappa)} \frac{1}{z - \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}}$$

— wo $\varkappa$ alle ganzen Zahlen (Null inclusive) durchläuft, welche der Bedingung

$$\left|\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

genügen — regulär analytisch für $\Re(z) \geqq 0$, bis auf die Stelle $z = 0$. Wir erwähnen noch die durch unmittelbare Integration für den Fall $\Re(z) > \exp\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}$ sich ergebende Formel

$$\frac{1}{z - \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}} =$$

$$= \int_0^\infty \exp\left\{t\left[\exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\} - z\right]\right\} dt,$$

woraus wir nach (14) gewinnen, dass die Funktion

$$f_\alpha(t,\varphi) - \frac{1}{\alpha}\sum_{(\varkappa)} \exp\left\{t\,.\exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}\right\}$$

die L-Transformierte $G_\alpha(z,\varphi)$ hat. Dies ist für die rechte Halbebene regulär und der charakteristische Teil ihrer Darstellung auf der Geraden $\Re(z) = 0$ wird wie im Falle eines reellen α

$$-\sum_{(k\geqq 0)} \frac{e^{i(k+1)\alpha}}{z^{1-(k+1)\alpha}}\,.$$

Wir können jetzt schon den Satz von Haar anwenden und nach demselben wird

$$\lim_{t=\infty} t^n\left[f_\alpha(t,\varphi) - \sum_{(\varkappa)} \exp\left\{t\exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\nu+1} \frac{e^{-i\varphi\alpha k}}{\Gamma(1-k\alpha)}\, t^{-k\alpha}\right] = 0$$

für

$$n \leqq [a(\nu+2)-1].$$

Im Laufe unserer Betrachtung hat φ einen beliebigen festen Wert bedeutet. Wenn φ konstant ist und t von Null bis Unendlich wächst, dann läuft

$$x = t^\alpha e^{i\varphi\alpha} \qquad (\alpha = a + ib)$$

längs einer logarithmischen Spiralen. Die Gleichung dieser Spiralen ist in Polarkoordinaten

$$\varrho = \exp\left\{-\varphi \frac{|\alpha|^2}{b}\right\} \exp\left\{\frac{a}{b}\theta\right\}$$
$$\theta = \varphi a + b \log t.$$

Wenn man noch die Transformation einführt

$$\varphi = \frac{a}{|\alpha|^2}\Phi,$$

so ergibt sich endlich nach der vorigen Formel *die asymptotische Formel*

$$E_\alpha(x) = \sum_{(\varkappa)} \exp\left\{|x|^{\frac{1}{\alpha}} \exp\left\{\frac{\Phi + 2\pi\varkappa}{\alpha} i\right\}\right\} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]} \frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)} + \frac{\varepsilon(x)}{x^{\frac{n}{\alpha}}},$$

wo die Summation $(\varkappa)$ *über die der Relation*

$$|\Phi + 2\pi\varkappa| \leqq \frac{\pi}{2} \frac{|\alpha|^2}{a}$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt wird, und $\varepsilon(x) \to 0$, *wenn* x *längs einer der logarithmischen Spiralen*

$$\arg x = \frac{b}{a} \log |x| + \Phi$$

ins Unendliche rückt.

(Eingegangen am 30. Juni 1927.)

Über reguläre Variationsprobleme.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Bekanntlich ist der sogenannte DU BOIS REYMONDsche Einwand in der Theorie der Doppelintegrale tiefgreifender als in der Theorie der einfachen Integrale. Während man nämlich bei den letzteren mit Hülfe des DU BOIS REYMONDschen Lemmas zeigen kann, dass jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion (unter recht allgemeinen Voraussetzungen über den Integranden des Variationsproblems) eine stetige zweite Ableitung besitzt und daher die EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung erfüllt, so gilt der entsprechende Satz für Doppelintegrale nicht. Auf diesen wichtigen Umstand hat zuerst Herr HADAMARD hingewiesen;[1]) er zeigte (an der Hand eines sehr einfachen Beispiels), dass die erste Variation eines Doppelintegrales verschwinden kann, ohne dass die entsprechende Extremalfunktion zweite Ableitungen besitzen müsste. Da damit die übliche EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung hinfällig wird, so entstand das Problem, das Verschwinden der ersten Variation in anderer Weise in Gleichungen umzusetzen.

Diese Frage behandelte ich in einer Arbeit im *Journal für die re.ne und angewandte Mathematik*[2]) durch Heranziehung eines

[1]) *Comptes Rendus* Bd. 144, S. 1092—1093. Ein anderes Beispiel, — wo es sich sogar um ein reguläres Variationsproblem handelt — gab L. LICHTENSTEIN, *Math. Ann.* Bd. 69, S. 514—516.

[2]) Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Bd. 149, S. 1—18. — Einen einfachen Beweis (nebst Anwendungen auf die Hydrodynamik) des genannten Hülfsatzes gab L. LICHTENSTEIN in seiner Arbeit: Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik (*Annales de la société polonaise de mathématique* 1924, S. 20—28). — Auf Variationsprobleme mit variierender Begrenzungslinie wurden meine Resultate von E. GERGELY in seiner Dissertation angewandt (Über die Variation von Doppelintegralen mit variierender Be-

Hülfssatzes, dem — wie mir scheint — in der Theorie der Doppelintegrale dieselbe Rolle zukommt, wie dem Du Bois Reymondschen Lemma bei den einfachen Integralen. Für Variationsprobleme von der Form

$$\iint\limits_{G} f(p, q, x, y)\, dx\, dy \qquad \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q\right)$$

(bei vorgeschriebenen Randbedingungen) bewies ich, *ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion vorauszusetzen,* dass jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion in Gemeinschaft mit einer stetig differenzierbaren Hülfsfunktion $Z(x, y)$ die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right).$$

befriedigt, und einen entsprechenden Satz für den Fall, dass im Integranden des Variationsproblems die unbekannte Funktion auftritt.

Dieses Resultat führt in natürlicher Weise auf den Gedanken, die weiteren Ergebnisse der Variationsrechnung, die man in der klassischen Theorie gestützt auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung 2. Ordnung entwickelt, auf Grund meines oben angegebenen Differentialgleichungsystems erster Ordnung abzuleiten, womit der Vorteil verbunden ist, dass die gewonnenen Sätze für alle Extremalfunktionen, nicht nur für die zweimal differenzierbaren gelten. Aus diesem Gedanken entsprang die vorliegende Note, in der ich mich mit regulären Variationsproblemen der obigen Form beschäftige; es zeigt sich, dass die Sätze, die man auf Grund meines Gleichungssystems gewinnt, keineswegs komplizierter sind als die entsprechenden, die sich aus der üblichen Euler-Lagrangeschen Gleichung ergeben, an Allgemeinheit aber umfassender sind,

grenzungslinie, *diese Acta* Bd. II, S. 139—146). — T. Radó bewies (Über den analytische Charakter der Minimalflächen, *Math. Zeitschrift* Bd. 24, S. 321—327.) auf derselben Grundlage die Analytizität der Minimalflächen; derselbe leitete zwei andere Gleichungssysteme auf Grund meines Hülfsatzes für die Extremalfläche ab (Bemerkungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta* Bd. II, S. 147—156). — Die entsprechenden Untersuchungen für dreifache Integrale wurden von A. Szücs durchgeführt (Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes, *diese Acta* Bd. III, S. 81—95) — Eine Erweiterung des genannten Hülfsatzes ist endlich eine wesentliche Stütze meiner Lösung des Plateauschen Problems. (Über das Plateausche Problem, *Math. Ann.* Bd. 97, S. 124—158).

da die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion nirgends vorausgesetzt wird.

Auf Grund einer einfachen Bemerkung (vgl. **1.**), die die Verallgemeinerung eines bekannten STEINERschen Satzes über den Flächeninhalt auf reguläre Variationsprobleme ist, zeige ich (in **2.**), dass im Falle eines regulären Variationsproblems jede Lösung meines Differentialgleichungssystems ein absolutes Minimum des Variationsproblems liefert; daraus folgen (vgl. **3.**) bestimmte Eindeutigkeitssätze, die — wie mir scheint — auch in den allereinfachsten Fällen neu sind. In **4.** gebe ich endlich eine Anwendung auf das besondere aus dem PLATEAUschen Problem entspringende Differentialgleichungssystem.

1. Unsere Entwicklungen fussen auf der folgenden Bemerkung. Die Funktion

$$f(p, q, x, y)$$

möge für alle reellen Werte von p, q und für solche Werte von x, y definiert sein, die in einem von einer doppeltpunktlosen Kurve umrandeten Gebiet G der xy-Ebene liegen; wir nehmen an, dass die zweiten Ableitungen dieser Funktion nach p und q existieren und so beschaffen sind, dass die Ungleichungen[3])

$$f_{pp} > 0, \quad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0 \tag{1}$$

an jeder Stelle des Definitionsbereiches von $f(p, q, x, y)$ statthaben. Es sei ferner $z(x, y)$ irgendeine Funktion der beiden reellen Veränderlichen x, y, die im Gebiet G der xy-Ebene definiert und daselbst samt ihren ersten Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$ stetig ist; wir betrachten das Integral

$$I[z] = \iint_G f(p, q, x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können wir die in Frage stehende Bemerkung wie folgt formulieren:

Sind $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ zwei im Gebiet G definierte Funktionen, die samt ihren ersten Ableitungen

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$$

---

[3]) Wir bezeichnen — wie üblich — die partiellen Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indices.

daselbst stetig sind, θ aber irgendeine zwischen 0 *und* 1 *gelegene Zahl,* $0<\theta<1$, *so gilt die Ungleichung*

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]\leqq(1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2], \tag{3}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthat, wenn die Differenz der beiden Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ konstant ist.

In der Tat, man findet — wenn man zur Abkürzung $(1-\theta)p_1+\theta p_2=\bar{p}$, $(1-\theta)q_1+\theta q_2=\bar{q}$ setzt — durch zweimalige Differentiation der Definitionsgleichung

$$\varphi(\theta)=I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]=$$
$$=\iint\limits_G f\big((1-\theta)p_1+\theta p_2,\ (1-\theta)q_1+\theta q_2,\ x, y\big)\,dx\,dy$$

nach θ:

$$\varphi'(\theta)=\iint\limits_G \Big\{f_p(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)+f_q(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(q_2-q_1)\Big\}\,dx\,dy \tag{4}$$

und

$$\varphi''(\theta)=\iint\limits_G \Big\{f_{pp}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)^2+$$
$$+2f_{pq}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)(q_2-q_1)+f_{qq}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(q_2-q_1)^2\Big\}\,dx\,dy.$$

Zufolge der Ungleichungen (1) ist der Integrand stets nicht-negativ und nur dann Null, wenn

$$p_1=p_2 \text{ und } q_1=q_2$$

ist. Es ist daher für jedes θ

$$\varphi''(\theta)\geqq 0, \tag{3'}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthaben kann, falls überall in G $p_1=p_2$, $q_1=q_2$ ist, d. h. die Differenz der Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ eine Konstante ist. In diesem trivialen Falle ist für jedes θ

$$\varphi''(\theta)=0,$$

also ist $\varphi(\theta)$ eine lineare Funktion von θ, d. h. es ist

$$\varphi(\theta)=(1-\theta)\varphi(0)+\theta\varphi(1),$$

woraus unmittelbar

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]=(1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2]$$

folgt. Schliessen wir diesen Fall aus, so drückt die nunmehr leicht ableitbare Ungleichung

$$\varphi(\theta)<(1-\theta)\varphi(0)+\theta\varphi(1) \text{ für } 0<\theta<1,$$

die mit unserer Behauptung (3) identisch ist, die geometrische Tatsache aus, dass bei einer nach unten konvexen Kurve jeder

Kurvenbogen unterhalb der die Endpunkte verbindenden Sehne liegt. Analytisch folgt dies aus der Bemerkung, dass die Funktion

$$\varphi(\theta) \quad (1-\theta)\varphi(0)-\theta\varphi(1),$$

die für $\theta=0$ und $\theta=1$ verschwindet, innerhalb des Intervalles $0\leqq\theta\leqq 1$ nirgends positiv oder Null sein kann, da sie im entgegengesetzten Fall an einer *inneren* Stelle dieses Intervalls einen Maximum haben müsste, was aber mit der soeben für alle diese θ abgeleiteten Ungleichung $\varphi''(\theta)>0$ im Widerspruch steht.

Damit ist unsre Ungleichung (3) bewiesen, d. h. es ist für $0\leqq\theta\leqq 1$

$$\iint_G f\big((1-\theta)p_1+\theta p_2,(1-\theta)q_1+\theta q_2,x,y\big)\,dx\,dy\leqq$$
$$\leqq(1-\theta)\iint_G f(p_1,q_1,x,y)\,dx\,dy+\theta\iint_G f(p_2,q_2,x,y)\,dx\,dy.$$

Insbesondere ergibt unsere Bemerkung für $\theta=\frac{1}{2}$ das Resultat

$$I\left[\frac{z_1+z_2}{2}\right]\leqq\frac{1}{2}\left(I[z_1]+I[z_2]\right),$$

oder

$$\iint_G f\left(\frac{p_1+p_2}{2},\frac{q_1+q_2}{2},x,y\right)dx\,dy\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{2}\left(\iint_G f(p_1,q_1,x,y)\,dx\,dy+\iint_G f(p_2,q_2,x,y)\right)dx\,dy.$$

Wählt man

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

so ist die Ungleichung (1) offenbar erfüllt und das Integral (2) stellt den Flächeninhalt des über G gelegenen Teiles der Fläche $z=z(x,y)$ dar. Die letzte Ungleichung drückt alsdann eine wohlbekannte, von Steiner[4]) bewiesene Eigenschaft des Flächeninhaltes aus, und unsere soeben abgeleitete Ungleichung (3) ist eine Verallgemeinerung dieses Steinerschen Satzes auf reguläre Variationsprobleme.

2. Auf Grund der vorangehenden Bemerkung können wir nun den folgenden Satz beweisen:

Die im Gebiet G definierten Funktionen

$$z(x,y) \text{ und } Z(x,y),$$

---

4) Gesammelte Werke S. 298.

die samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von x, y sind, mögen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) \tag{5}$$

sein; alsdann liefert $z(x, y)$ ein absolutes Minimum des Variationsproblems

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy = \text{Min.}$$

bei festen Randbedingungen, d. h. es gilt die Ungleichung

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy < \iint_G f\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy$$

für jede von $z(x,y)$ verschiedene Funktion $\bar{z}(x, y)$, die auf dem Rande von G dieselben Randwerte annimmt wie $z(x, y)$.

Zum Beweis betrachten wir unsere Funktion

$$\varphi(\theta) = I[(1-\theta)z + \theta\bar{z}];$$

da — wie wir soeben gesehen haben — für jeden im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 1$ gelegenen Wert von θ die zweite Ableitung $\varphi''(\theta) > 0$ ist,[5]) so ist für $0 < \theta \leqq 1$

$$\varphi(\theta) > \varphi(0) + \varphi'(0)\,\theta,$$

insbesondere für $\theta = 1$

$$\varphi(1) > \varphi(0) + \varphi'(0). \tag{6}$$

Die Gleichung (4) ergibt aber, wenn man z_1 durch z und z_2 durch $\bar{z}$ ersetzt und zur Abkürzung $z(x, y) - \bar{z}(x, y) = \zeta(x, y)$ einführt, die Relation

$$\varphi'(0) = \iint_G \left\{ f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy,$$

die mit Rücksicht auf das Differentialgleichungssystem (5) auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$\varphi'(0) = \iint_G \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) dx\, dy. \tag{7}$$

In dieser Formel sind $Z(x, y)$ und $\zeta(x, y)$ in G definierte samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen, von denen die zweite,

---

[5]) Da z und $\bar{z}$ verschiedene Funktionen sind, die auf dem Rande von G übereinstimmen, so kann die Differenz dieser Funktionen keine Konstante sein; es gilt daher die Ungleichung (3') mit Ausschluss des Gleichheitszeichens.

$\zeta(x, y)$ auf dem Rande dieses Gebietes verschwindet. Man kann nun unschwer zeigen, dass das Integral (7) gleich Null ist. In der Tat, wenn die Funktion $Z(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar ist, so folgt unsere Behauptung unmittelbar durch Produktintegration, da

$$\iint_G \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_G \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\,dx\,dy = -\iint_G \zeta \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy$$

ist. Besitzt aber $Z(x, y)$ keine Ableitungen zweiter Ordnung, so approximiere man diese Funktion durch eine Folge zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, etwa durch eine Polynomfolge

$$Z_1(x, y),\ Z_2(x, y), \ldots, Z_n(x, y), \ldots$$

von der Art, dass gleichmässig in G die Limesgleichungen

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(x, y) = Z(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}$$

statthaben. Es ist sodann

$$\iint_G \left\{\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\} dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_G \left\{\frac{\partial Z_n}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z_n}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\} dx\,dy = 0,$$

womit das Verschwinden des Integrals (7) in allen Fällen bewiesen ist. Es ist daher $\varphi'(0) = 0$ und die Ungleichung (6) zeigt, dass $\varphi(1) > \varphi(0)$ ist, d. h. es ist

$$I[\bar{z}] > I[z]$$

und dies ist der oben ausgesprochene Satz.

3. Mit Hilfe der Ungleichungen (3) können wir nun zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen *das Variationsproblem*

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\,dy = \text{Min.}$$

bei gegebenen Randbedingungen nur eine Lösung besitzen kann.

Sind nämlich $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ zwei verschiedene im Gebiet G definierte, samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen, die beide auf dem Rande dieses Gebietes die gegebenen Randwerte besitzen und dem obigen Integral denselben Wert m erteilen:

$$I[z_1] = \iint_G f\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, x, y\right) dx\,dy =$$

$$= I[z_2] = \iint_G f\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, x, y\right) dx\,dy = m,$$

so ist nach Ungleichung (3)

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2] < (1-\theta) I[z_1] + \theta I[z_2] = m.$$

Die Ungleichung gilt in der schärferen Form (mit Ausschluss des Gleichheitszeichens), da zufolge unserer Annahmen die Differenz $z_1 - z_2$ nicht konstant sein kann. Da ferner die Funktion

$$(1-\theta)z_1 + \theta z_2 = z_1 + \theta(z_2 - z_1)$$

dieselben Randwerte besitzt wie z_1 und z_2, so folgt aus der letzten Ungleichung, dass m nicht der Minimalwert des betrachteten Integrals bei den gegebenen Randwerten sein kann, womit unsere Behauptung (dass der Minimalwert dem Integral nicht durch zwei Funktionen der Konkurrenz erteilt wird) bewiesen ist.

Durch Kombination dieses Satzes mit dem in **2.** gewonnenen Resultat gelangt man zu dem folgenden Eindeutigkeitssatz:

Es erfülle $f(p, q, x, y)$ die in **1.** *angegebenen Bedingungen; wir nehmen an, dass die Funktionenpaare*

$$z_1(x, y) \text{ und } Z_1(x, y)$$

bzw.

$$z_2(x, y) \text{ und } Z_2(x, y)$$

(von denen nur einmalige Differenzierbarkeit nach x un y vorausgesetzt wird) das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) \tag{5}$$

befriedigen, ferner, dass die Randwerte der Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ in jedem Randpunkte von G übereinstimmen; dann gilt für jede Stelle in G

$$z_1(x, y) = z_2(x, y)$$

und

$$Z_1(x, y) - Z_2(x, y) = \text{konst.}$$

Dieser Satz ist — wie mir scheint — schon für den Fall eines linearen Differentialgleichungssystems neu. Setzt man nämlich

$$f(p, q, x, y) = \frac{1}{2}\{a(x, y)p^2 + 2b(x, y)pq + c(x, y)q^2\},$$

wo $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ in G definierte stetige Funktionen bedeuten, die die Ungleichung

$$a(x, y)\, c(x, y) - (b(x, y))^2 > 0$$

befriedigen, so erfüllt $f(p, q, x, y)$ die geforderten Bedingungen unseres Satzes. *Für das lineare Differentialgleichungssystem*

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = b(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} - b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

gilt daher der Eindeutigkeitssatz, d. h. wenn man auf dem Rande von G die Randwerte von $z(x, y)$ vorschreibt, so kann es höchstens eine samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion $z(x, y)$ mit diesen Randwerten geben, die das zuletzt angeschriebene Differentialgleichungssystem befriedigt und die zugehörige Funktion $Z(x, y)$ ist bis auf einen konstanten Addenden eindeutig festgelegt.

Aus den bekannten Eindeutigkeitssätzen der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen würde dieser Satz nur dann folgen, wenn man ausser der Differenzierbarkeit der Koeffizienten $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ auch die Existenz der zweiten Ableitungen von $z(x, y)$ voraussetzen würde. Es wäre auch vom Interesse, diesen Eindeutigkeitssatz (ohne diese Einschränkungen) auf das allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \alpha(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \gamma(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + \delta(x, y)\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

zu übertragen.

4. Wir nehmen jetzt an, dass die Funktion f nur die Variablen p und q enthält (von x und y aber unabhängig ist) und dass für alle Werte der Veränderlichen p, q die Ungleichungen

$$f_{pp} > 0, \quad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 > 0 \tag{1}$$

erfüllt sind. Wir zeigten in **2.**, dass jede nach x und y stetig differenzierbare Lösung $z(x, y)$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{5}$$

ein absolutes Minimum für das Integral

$$\iint_G f\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

liefert, wenn zur Konkurrenz diejenigen Funktionen $\bar{z}(x, y)$ zugelassen werden, die in G samt ihren ersten Ableitungen stetig sind und auf der Berandung von G dieselben Randwerte wie $z(x, y)$ annehmen. Für die Extremalfunktionen dieses Variationsproblems beweis aber T. Radó,[6]) in Anlehnung an meine in der Einleitung genannten Arbeit, dass sie in Gemeinschaft mit zwei weiteren Hilfsfunktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ (die in G ebenfalls einmal stetig

[6]) *Diese Acta* Bd. II, S. 147—156.

differenzierbar sind) die folgenden zwei Differentialgleichungssysteme befriedigt:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\, f_q\!\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial y}=f\!\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial z}{\partial x}\, f_p\!\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{5'}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x}=f\!\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\, f_q\!\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial \omega_2}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\, f_p\!\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{5''}$$

Daraus folgt nun, dass, falls die Funktion $f(p, q)$ die Ungleichung (1) erfüllt, jede Lösung des Systems (5) auch Lösung der Differentialsysteme (5′) und (5″) ist. Diese Tatsache ist deshalb vom Interesse, da man diese letzten Gleichungen aus den Gleichungen (5) nur dann durch einfaches Umrechnen ableiten kann, falls man die zweimalige Differenzierbarkeit von $z(x, y)$ voraussetzt; auch bleibt es fraglich, ob ohne diese Annahme die Radóschen Gleichungen aus meinen Gleichungen (5) auch in dem Falle ableitbar sind, wo die Ungleichung (1) nicht erfüllt ist.

Als Anwendung dieser Betrachtungen beweisen wir noch den folgenden Satz.

Es seien $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ in G definierte einmal stetig differenzierbare Funktionen von x, y, die das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\qquad \frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \tag{8}$$

befriedigen; dann sind $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ analytische Funktionen von x und y.

Dieser Satz — ein vollkommenes Analogon der bekannten Tatsache, dass die stetig differenzierbaren Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen analytisch sind — ist eine unmittelbare Folge eines schönen Satzes von T. Radó über den analytischen Charakter der Minimalflächen.[7]) Setzt man nämlich

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

so ist offenbar die Ungleichung (1) erfüllt und es gehen die Gleichungen (5) in das System (8) über. Zufolge der soeben gemachten Bemerkung folgt dann die Existenz zweier Hülfsfunktionen (mit

[7]) Vgl. die in der Anmerkung [2]) genannten beiden Arbeiten dieses Verfassers.

stetigen ersten Ableitungen) $\omega_1(x, y)$ und $\omega_2(x, y)$, die gemeinsam mit $z(x, y)$ die beiden Differentialsysteme

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{8'}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{8''}$$

befriedigen. T. Radó zeigt nun in der erwähnten Arbeit, dass jede in einem Gebiet einmal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y)$, welche zusammen mit drei Hilfsfunktionen $Z(x, y)$, $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ die Gleichungen (8), (8'), (8'') befriedigt, analytisch ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

(Eingegangen am 13. Oktober 1927.)

Sur la formule d'inversion de Fourier.

Par Frédéric Riesz à Szeged.

1. L'analyse de la formule d'inversion de Fourier

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{iu(x-t)}\,dt \tag{1}$$

a conduit à l'idée d'étudier à part la transformation fonctionnelle linéaire, définie primitivement par la formule

$$T(f)=F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-iut}\,dt \tag{2}$$

pour les fonctions sommables (au sens de Lebesgue) dans l'intervalle $(-\infty,\infty)$ et étendue par des définitions convenables à d'autres classes de fonctions, notamment à la classe L^2 des fonctions à carré sommable. L'importance de la classe L^2 était indiquée par l'analogie qu'elle devait montrer avec la théorie des séries de Fourier des fonctions sommables et à carré sommable et dont les résultats principaux, à savoir le théorème de Parseval et son réciproque, faisaient prévoir des résultats analogues, permettant de préciser le sens de la formule (1).

Dans les travaux de MM. Plancherel et Titchmarsch[1]) concernant ce sujet, tous ces faits, avec d'autres plus généraux, ont été démontrés par des voies différentes, et la Note présente a pour seul objet d'appeler l'attention sur ce que l'on peut rattacher ces faits, presque sans calcul et sans faire appel aux séries de

---

[1]) M. Plancherel, Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. di Palermo,* 30 (2e sem. 1910), pp. 289—335; Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel, *Proc. London Math. Soc.,* series 2, vol. 24 (1925), pp. 62—70. E. C. Titchmarsh, Hankel transforms, *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* 21 (1923), pp. 463—473. *Cf.* aussi S. Pollard, On Fourier's integral, *Proc. London Math. Soc.,* series 2, vol. 26 (1926), pp. 12—24.

Fourier, aux théorèmes généraux sur l'intégration et en particulier sur la convergence en moyenne et cela en se servant d'un artifice de calcul bien connu. Dans le cas actuel, l'idée de cet artifice est suggérée par le fait que la fonction $e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une fonction fondamentale de la transformation T.

2. Considérons l'intégrale triple

$$I=\frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}-iut+iux} f(t)g(x)\,du\,dt\,dx$$

et supposons que les fonctions f et g soient sommables dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Dans cette hypothèse, la fonction à intégrer étant égale, en valeur absolue, au produit des fonctions

$$e^{-\frac{u^2}{2n^2}},\ |f(t)|,\ |g(x)|$$

dont chacune est sommable par rapport à la variable dont elle dépend, l'intégrale I existe et, d'après le théorème de M. Fubini, on peut la calculer en intégrant successivement et dans un ordre quelconque par rapport à chaque variable. En intégrant dans l'ordre x, t, u il vient

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}}du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{iux}\,dx. \tag{3}$$

L'intégration dans l'ordre t, u, x donne

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,e^{-\frac{u^2}{2n^2}}du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}f(t)\,dt. \tag{4}$$

Enfin, en commençant par la variable u et en écrivant d'abord seulement les facteurs qui la contiennent, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}+iu(x-t)}du=e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}(u-in^2(x-t))^2}du=n\sqrt{2}e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

où l'intégration par rapport à z se fera suivant une certaine droite parallèle à l'axe réel. Or, il suit immédiatement par le théorème de Cauchy que ladite droite peut être remplacée par l'axe réel et par conséquent, l'intégrale au dernier membre sera égale à $\sqrt{\pi}$. L'intégration par rapport à u est donc effectuée et l'on a

$$I=\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} f(t)\,g(x)\,dt\,dx. \tag{5}$$

3. Dans les formules (3) et (5), écrivons au lieu de $g(x)$ la fonction $\bar{f}(x)$ prenant les valeurs conjuguées à celles de $f(x)$; en comparant les deux formules et en se servant de la notation de la formule (2), il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}} |F(u)|^2 du = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} f(t)\bar{f}(x)\,dt\,dx. \tag{6}$$

Supposons que le fonction $f(t)$, outre d'être sommable comme il était supposé jusqu'ici, soit aussi à carré sommable. Cela étant, faisons tendre n vers l'infini. Envisageons d'abord le second membre. Appliquons aux fonctions

$$e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{4}} f(t) \quad \text{et} \quad e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{4}} \bar{f}(x)$$

l'inégalité de Schwarz; il vient que

$$\left| \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} f(t)\,\bar{f}(x)\,dt\,dx \right| \leqq \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} |f(t)|^2\,dt\,dx.$$

En effectuant au second membre l'intégration par rapport à x, on obtient

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt.$$

En comparant ce résultat avec l'équation (6), il vient que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}} |F(u)|^2\,du \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt,$$

et par le lemme bien connu de M. Fatou, il s'ensuit, pour $n = \infty$, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\,du \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt. \tag{7}$$

Cette inégalité établie, nous sommes à même d'étendre la définition de la transformation de Fourier $T(f)$, donnée primitivement par la formule (2), à toute la classe L^2. Rappelons ce que l'on entend par transformation linéaire, portant sur la classe L^2 Tout d'abord, pour la commodité du langage et par la nature des choses, on convient de considérer comme identiques deux fonctions qui ne diffèrent que dans un ensemble de mesure nulle. Conformément à cette convention, nous parlerons d'une fonction déterminée aussi dans le cas, lorsque la fonction n'est déterminée qu'à une fonction additive près, s'annulant sauf dans un ensemble de mesure nulle. Ces conventions faites, une transformation $T(f)$ qui fait correspondre à chaque élément de la classe L^2 un élément déterminé de la même classe, sera dite linéaire lorsqu'elle est distributive, c'est-à-dire que

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$$

et qu'elle est bornée, c'est qu'il existe une constante M de sorte que l'on ait pour toutes les $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T(f)|^2 du \leqq M^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{8}$$

Envisageons maintenant la formule (2). Cette formule a un sens pour les fonctions sommables et, a fortiori, pour celles qui sont à la fois sommables et à carré sommable et qui constituent un sous-ensemble L^{12} de la classe L^2; mais elle est, jusqu'à présent, dépourvue de sens pour les éléments de L^2 qui restent. Quant à l'ensemble L^{12}, la formule (2) fait correspondre à chaque élément $f(t)$ de cet ensemble une fonction $T(f) = F(u)$ et l'inégalité (7) nous assure que $F(u)$ appartient à la classe L^2. De plus, grâce à cette même inégalité, l'hypothèse (8) est satisfaite pour les éléments de L^{12} et cela avec $M = 1$. La distributivité de $T(f)$ est évidente. Enfin, l'ensemble L^{12} contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments et il est partout dense dans la classe L^2, l'écart de deux fonctions f_1 et f_2 étant mesuré par

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1 - f_2|^2 dt\right]^{1/2},$$

c'est-à-dire les éléments limites étant définis à la base de la notion de la convergence en moyenne. En effet, pour s'approcher en moyenne d'un élément quelconque f^* de L^2 par des éléments $f_1, f_2, \ldots$ de L^{12} il suffit par exemple poser $f_n(t) = f^*(t)$ pour $t| < n$ et $f_n(t) = 0$ ailleurs.

Soit donc f^* un élément quelconque de L^2 et soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments du sous-ensemble L^{12}, convergeant en moyenne vers l'élément f^*. Soit $\{F_n\}$ la suite qui y correspond par la formule (2); on aura, d'après l'inégalité (7), appliquée à la fonction $f = f_m - f_n$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_m(t) - F_n(t)|^2 dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt. \tag{9}$$

Comme, d'après l'hypothèse faite, la suite $\{f_n\}$ converge en moyenne et, par conséquent, le second membre de (9) tend vers zéro quand m et n vont à l'infini, il en sera de même quant au premier membre. Il s'ensuit que les F_n convergent en moyenne vers un élément déterminé F^* de L^2. En faisant correspondre cet élément à l'élément f^*, on aura défini la transformation de FOURIER $T(f)$ pour la classe L^2 complète et l'on voit immédiatement que cette transformation est univoquement déterminée et qu'elle est linéaire, c'est-à-dire qu'elle est distributive et bornée, avec $M=1$.

4. Voilà maintenant le fait qui correspond, dans l'ordre d'idée que nous suivons, à la formule d'inversion de FOURIER.

Désignons par $\overline{T}(f)$ la transformation qui résulte de T en la faisant suivre d'un changement de signe de la variable, c'est à dire en faisant correspondre à $f(t)$ la fonction $F(-u)$. Il est manifeste que l'on peut aussi définir la transformation $\overline{T}$, pour l'ensemble L'^2, par la formule

$$\overline{T}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\,dx$$

et étendre cette définition, par continuité au sens de la convergence en moyenne, à toute la classe L^2. Je dis que l'on a $\overline{T}=T^{-1}$ ou ce qui revient au même, $\overline{T}T=E$, E désignant la transformation unité, celle qui fait correspondre chaque fonction à elle-même.

Avant d'aller à la démonstration de ce fait principal de notre théorie, observons qu'il implique, comme conséquence immédiate, la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(u)|^2\,du=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt, \tag{10}$$

l'analogue de la formule de PARSEVAL. En effet, comme $F(u)=T(f)$, il faut avoir

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(u)|^2\,du\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$$

et d'autre part, la relation $\overline{T}(F)=f(t)$ ou ce qui revient au même, la relation $T(F)=f(-t)$ entraîne l'inégalité inverse.

5. Pour démontrer la relation $\overline{T}T=E$ ou $T\overline{T}(f)=f$, il suffira montrer que l'intégrale de la fonction $\overline{T}T(f)$ sur un intervalle (a, b) quelconque ne diffère pas de celle de la fonction f. En effet, d'après la théorie de M. LEBESGUE, deux fonctions qui ont la même intégrale indéfinie, ne peuvent différer l'une de l'autre que dans un ensemble de mesure nulle. De plus, il suffira constater cette identité seulement pour les fonctions appartenant à l'ensemble L^{12} puisque cet ensemble est partout dense dans L^2 et que, par conséquent, c'est E la seule transformation qui fait correspondre à eux-mêmes tous les éléments de L^{12}.

Nous partons des formules (4) et (5), dans lesquelles nous posons $g(x)=1$ pour $a<x<b$ et égale à zéro ailleurs. En comparant les deux formules et en remplaçant, dans la seconde, l'intégrale double par deux intégrations successives, on obtient l'équation

$$(11)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, e^{-\frac{u^2}{2n^2}} F(u)\,du = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_a^b e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}}\,dx.$$

Considérons d'abord le second membre de cette équation. Par la substitution $x=t+\frac{y}{n}$, il devient

$$(12)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_{n(a-t)}^{n(b-t)} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g_n(t)\,dt$$

où l'on a posé

$$g_n(t) = \int_{n(a-t)}^{n(b-t)} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

La fonction $g_n(t)$ ne peut dépasser la valeur $\sqrt{2\pi}$, valeur de la même intégrale entre les limites $-\infty$, ∞; de plus, elle tend vers cette valeur, pour n infini, toujours que t est situé entre a et b, et elle tend vers 0 pour les valeurs de t extérieures à l'intervalle (a, b). Par conséquent, d'après le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites ayant une fonction majorante sommable, l'intégrale (12), c'est-à-dire le second membre de la formule (11), tendra, pour n infini, vers l'intégrale de $f(t)$ entre a et b.

Quant au premier membre de la même formule, il peut être mis sous la forme

$$(13)\qquad \int_a^b \left[\,\overline{T}\left(e^{-\frac{u^2}{2n^2}} F(u)\right)\right] dx.$$

Or, l'expression en parenthèse n'est que la fonction $F(u)$, à carré sommable et indépendante de n, multipliée par un facteur qui, pour n infini, tend vers la constante 1 tout en restant borné; donc on a, d'après le théorème de M. Lebesgue que nous venons d'appliquer,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(u) - e^{-\frac{u^2}{2n^2}} F(u) \right|^2 du \to 0,$$

c'est à dire que, la fonction en parenthèse converge en moyenne vers $F(u)$. Donc l'intégrande de (13) converge en moyenne vers la fonction $\overline{T}(F) = \overline{T}T(f)$ et l'intégrale (13), c'est à dire le premier membre de (11) tend vers l'intégrale de cette fonction entre a et b.

En résumé, le passage à la limite, pour n infini, dans les deux membres de (11) donne

$$\int_a^b \overline{T}T(f)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt,$$

C. Q. F. D.

(Reçu le 25 octobre 1927)

Involutions et surfaces continues.

(Deuxième communication).*)

Par B. de KERÉKJÁRTÓ (Szeged).

IV. Réductions de la représentation paramétrique d'une surface continue.

1°. Soit S une sphère, t une transformation univoque et continue de S, F la surface continue qui est l'image de S par t. *Supposons que chaque élément* $\mathfrak{P}$[1]) *de* S *ait pour ensemble complémentaire un seul domaine; nous allons démontrer que sous cette condition, la surface appartient au type de la sphère.*[2])

Cette proposition donne une extension directe du théorème de M. FRÉCHET concernant les représentations paramétriques des courbes continues[3]), et en même temps une généralisation d'un résultat sur les représentations des surfaces continues que j'ai obtenu antérieurement pour un cas spécial.[4])

La proposition en question est équivalente (d'après les développements du numéro III. de la première communication) à la suivante:

Soit ($\mathfrak{P}$) un ensemble d'éléments sur la sphère (chaque élément $\mathfrak{P}$ est un ensemble de points fermé et d'un seul tenant) tel que chaque point de la sphère appartient à un élément $\mathfrak{P}$ et à un seul. Supposons *(a)* que si les points $P_1, P_2, \ldots$ des éléments $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ tendent vers le point P_ω d'un élément $\mathfrak{P}_\omega$, l'ensemble limite de $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ soit un sous-ensemble de $\mathfrak{P}_\omega$; *(b)* que l'ensemble complémentaire d'un élément $\mathfrak{P}$ quelconque sur la sphère

---

*) Première communication, *ces Acta*, vol. 3, (1927) pp. 49 67.

1) voir l. c., p. 58.

2) l. c., p. 59.

3) voir l. c., p. 55.

4) l. c., note 17) de la page 66.

soit un seul domaine. Sous ces conditions, on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les éléments $\mathfrak{P}$ de l'ensemble ($\mathfrak{P}$) et les points d'une sphère.

2°. Pour la démonstration de cet énoncé, nous avons besoin de quelques propositions concernant l'ensemble d'éléments ($\mathfrak{P}$). Nous considérons l'ensemble ($\mathfrak{P}$) comme un espace abstrait; c'est un espace (L) où l'on peut définir la limite par le moyen d'un écart (non nécessairement régulier).[5] Nous entendons par une *$\mathfrak{P}$-courbe continue* une image univoque et continue de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ formé d'éléments de cet espace; un *$\mathfrak{P}$-arc simple* respectivement une *$\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée* seront définis comme une image biunivoque et bicontinue de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, respectivement d'une circonférence.

(A) Soit l un arc de cercle sur la sphère S; l'ensemble $\mathfrak{L}$ des éléments $\mathfrak{P}$ qui ont des points sur l forment une $\mathfrak{P}$-courbe continue.

En effet, à chaque point de l correspond un élément de $\mathfrak{L}$ et un seul; lorsque les points $P_1, P_2, \ldots$ de l tendent vers le point P_ω de l, les éléments correspondants $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ de $\mathfrak{L}$ ont pour élément limite l'élément $\mathfrak{P}_\omega$ de $\mathfrak{L}$ qui correspond à P_ω.

3°. Nous allons démontrer la proposition suivante:

(B) L'ensemble complémentaire d'un $\mathfrak{P}$-arc simple sur S est un seul domaine.

La démonstration s'obtient en généralisant une démonstration élégante due à M. Alexander pour le théorème de Jordan.[6] Pour ce but, nous démontrerons d'abord une proposition auxiliaire, savoir:

(C) Soient M_1 et M_2 deux continus sur la sphère dont la partie commune est un seul continu K. Si A et B sont deux points de la sphère qui ne sont séparés ni par M_1, ni par M_2, ils ne sont séparés par $M_1 + M_2$ non plus.

Soit, en effet, $A\lambda_1 B$ une ligne polygonale sur S qui n'a pas de points communs avec M_2, et soit $A\lambda_2 B$ une autre ligne qui n'a pas de points sur M_2. Supposons que λ_1 et λ_2 n'aient pas de points communs sauf leurs extrémités A et B;[7] le polygone simple

[5] l. c., note [9] à la page 58.

[6] J. W. Alexander, A proof of Jordan's theorem about a simple closed curve, *Annals of Mathematics*, vol. 21., p. 180—184. (1920).

[7] voir, par exemple, Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (Berlin, 1923) p. 62., note [1]).

$\pi = \lambda_1 + \lambda_2$ n'a aucun point commun avec K; disons donc que K est à l'intérieur de π. Construisons une triangulation de la sphère dont les triangles sont de diamètre inférieur à la distance des sous-ensembles de M_1 et de M_2 situès à l'extérieur de π. Les triangles de cette triangulation qui contiennent les points de M_1 extérieurs à π et sur π, forment avec π et son intérieur un domaine polygonale. La frontière de ce domaine contient un polygone qui a des points communs avec λ_1; la ligne polygonale obtenu de ce polygone en omettant la ligne λ_2, rejoint A et B et elle n'a pas de point sur $M_1 + M_2$.

En appliquant la proposition que nous venons de démontrer un nombre fini de fois, nous obtenons immédiatement la proposition suivante:

(C') Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des continus sur la sphère S tels que la partie commune de M_i et M_{i+1} soit un continu et que M_i et M_{i+j} $(j \neq 0, \pm 1)$ n'aient pas de points communs. Si A et B sont deux points de la sphère qui ne sont séparés par aucun des continus M_i, ils ne sont pas séparés par l'ensemble $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ non plus.

Pour démontrer la proposition *(B)*, soit $\mathfrak{L}$ un $\mathfrak{P}$-arc quelconque sur S et soient A et B deux points arbitraires de la sphère S qui n'appartiennent à aucun élément de $\mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{P}_0$ est un élément arbitraire de $\mathfrak{L}$, il y a une ligne polygonale λ sur S qui joint A et B sans rencontrer $\mathfrak{P}_0$. Il y a donc un ε-voisinage de l'ensemble des points appartenants à $\mathfrak{P}_0$ sur la sphère qui ne contient aucun point de λ. Or il y a un intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ tel que les éléments correspondants aux nombres x de cet intervalle sont contenus entièrement dans le ε-voisinage de $\mathfrak{P}_0$ (correspondant à x_0). Déterminons donc pour chaque nombre x_0 de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ un intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ tel que le sous-ensemble de $\mathfrak{L}$ correspondant à cet intervalle ne sépare pas les points A et B sur la sphère. D'après le théorème de Heine et Borel, il y a parmi ces intervalles un nombre fini recouvrant tout l'intervalle $(0 \leqq x \leqq 1)$; soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ les extrémités de ces intervalles rangées de telle façon que $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+1} = 1$. Le sous-ensemble de $\mathfrak{L}$ correspondant à l'intervalle $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ est donc un continu M_i qui ne sépare pas A et B. La partie commune de M_i et M_{i+1} est le continu formé par les points de l'élément qui correspond à x_{i+1}, tandisque M_i et M_{i+j} $(j \neq 0, \pm 1)$ n'ont aucun point commun. De la proposition *(C')*, ils'ensuit que $M_1+M_2+\ldots+M_n=\mathfrak{L}$ ne sépare pas les points A et B sur la sphère; cela démontre notre proposition *(B)*.

4⁰. Une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée peut être considérée comme la somme de deux $\mathfrak{P}$-arcs simples qui n'ont aucun autre élément commun que leurs extrémités. D'un théorème de M. Rosenthal,[8]) on obtient, en tenant compte de notre proposition *(B)* le résultat suivant:

(D) Une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée décompose la sphère S en précisément deux domaines.

Nous allons démontrer le complément suivant à la proposition *(D)*:

(E) Tout élément d'une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière de tous les deux domaines déterminés par elle sur la sphère.

Soit $\mathfrak{P}_0$ un élément quelconque de la $\mathfrak{P}$-courbe $\mathfrak{L}$ et soit $\mathfrak{L}_0$ un arc arbitraire de $\mathfrak{L}$ contenant $\mathfrak{P}_0$; soit $\mathfrak{L}_1$ l'autre arc de $\mathfrak{L}$ déterminé par les extrémités de $\mathfrak{L}_0$. D'aprés la proposition *(B)*, l'arc $\mathfrak{L}_1$ ne décompose pas la sphère. Soient donc A et B deux points quelconques de la sphère, situés en deux domaines complémentaires différents de $\mathfrak{L}$. Soit $A\lambda B$ une ligne polygonale joignant A et B sans rencontrer $\mathfrak{L}_1$; λ a donc un point au moins sur $\mathfrak{L}_0$. Soient A_1 et B_1 des points de λ sur $\mathfrak{L}_0$ tels que les lignes AA_1 et BB_1 de λ ne contiennent pas des points de $\mathfrak{L}$ à part leurs extrémités. L'élément $\mathfrak{P}_1$ de $\mathfrak{L}$ contenant le point A_1 appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière du domaine complémentaire de $\mathfrak{L}$ qui contient A; l'élément $\mathfrak{P}_2$ de $\mathfrak{L}$ contenant le point B_1 appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière du domaine contenant B. Par conséquent, l'arc $\mathfrak{L}_0$ de $\mathfrak{L}$ contient d'éléments de tous les deux domaines. Comme $\mathfrak{L}_0$ est aussi voisin de $\mathfrak{P}_0$ que l'on veut, il s'ensuit que $\mathfrak{P}_0$ est un élément-limite des frontières de ces deux domaines. La $\mathfrak{P}$-frontière d'un $\mathfrak{P}$-domaine est un ensemble fermé d'éléments,[9]) par conséquent, $\mathfrak{P}_0$ appartient aux $\mathfrak{P}$-frontières de tous les deux domaines déterminés par $\mathfrak{L}$ sur la sphère.

(F) Chaque élément d'une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée est accessible dans les deux domaines complémentaires de la courbe.

---

[8]) A. Rosenthal, Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua, *Sitzungsber. der Bayer. Akad. der Wiss.*, München, 1919, p. 102, Satz 6.

[9]) voir note [9]) à la page 58 de la première communication.

La démonstration de cette proposition s'obtient par une légère modification de ma démonstration pour l'accessibilité des points d'une courbe simple et fermée.[10])

5°. Nous allons démontrer la proposition suivante:

(G) Pour deux éléments quelconques $\mathfrak{P}_1$ *et* $\mathfrak{P}_2$, *il y a une* $\mathfrak{P}$*-courbe simple et fermée séparant ces deux éléments.*

Si nous considérons les éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ comme des ensembles de points sur la sphère S, ils sont deux ensembles fermés sans point commun Il y a donc un polygone simple et fermé π séparant ces deux ensembles sur la sphère. Désignons par Q_1 et Q_2 deux points de π qui appartiennent à deux éléments différents $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$, et désignons par l_1 et l_2 les deux lignes en lesquelles π est divisé par ces deux points. Les éléments $\mathfrak{P}$ qui ont des points sur l_1 respectivement sur l_2 forment une $\mathfrak{P}$-courbe continue $\mathfrak{B}_1$ resp. $\mathfrak{B}_2$ en vertu de la proposition *(A)*. D'après un théorème dû à Kaluzsay,[11]) il y a en chaque courbe continue pour deux points arbitraires de la courbe un arc simple joignant les deux points. En appliquant ce théorème à nos $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$, déterminons un $\mathfrak{P}$-arc simple $\mathfrak{L}_1$ contenu en $\mathfrak{B}_1$ qui joigne $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ et un $\mathfrak{P}$-arc simple $\mathfrak{L}_2$ contenu en $\mathfrak{B}_2$ joignant $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$. Soient l_1' et l_2' deux lignes polygonales sur la sphère qui joignent un point P_1 de $\mathfrak{P}_1$ avec un point P_2 de $\mathfrak{P}_2$ sans se couper d'ailleurs, de telle façon que l_1' n'ait pas de points sur $\mathfrak{L}_2$ el l_2' n'ait pas de points sur $\mathfrak{L}_1$; comme aucun des $\mathfrak{P}$-arcs $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ ne decompose la sphère, d'après la proposition *(B)*, cela est toujours possible. En partant de $\mathfrak{Q}_1$ sur $\mathfrak{L}_1$, considérons le premier élément de $\mathfrak{L}_1$ qui a un point sur l_1' et en retournant de cet élément sur $\mathfrak{L}_1$, soit $\mathfrak{Q}_1'$ le premier élément de $\mathfrak{L}_1$ qui appartient à $\mathfrak{L}_2$. En passant de $\mathfrak{Q}_2$ sur $\mathfrak{L}_1$ jusqu'au premier élément qui a un point sur l_1' et en

---

10) Vorlesungen über Topologie, p. 65.

11) Kaluzsay, A felületre vonatkozó Jordan-tétel megfordítása (L'inverse du théorème de Jordan relatif aux surfaces), *Math. Phys. Lapok*, 24., p. 101—141 (1915). — Ce jeune géomètre hongrois bien doué disparu pendant la guerre — un élève de M. F. Riesz — a traité dans sa Thèse (Kolozsvár, 1915) le problème d'étendre le théorème de Schoenflies, inverse du théorème de Jordan, pour l'espace à trois dimension. Bien que sa solution du problème ne soit pas entièrement satisfaisante, dans son développement, il fournit des méthodes précieuses et des propositions intéressantes, parmi celles le théorème cité dans le texte. Le même théorème a été découvert plus tard par d'autres auteurs (Tietze, R. L. Moore) qui ne pouvaient pas connaître la Thèse ne publiée qu'en hongrois. Mais la démonstration de Kaluzsay a l'avantage d'une extrême simplicité; elle a été reproduite dans mon livre cité, p. 103.

retournant de cet élément, soit $\mathfrak{Q}_2'$ le premier élément de $\mathfrak{L}_1$ qui appartient à $\mathfrak{L}_2$. Les arcs $\mathfrak{L}_1'$ et $\mathfrak{L}_2'$ déterminés sur $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ par les éléments $\mathfrak{Q}_1'$, $\mathfrak{Q}_2'$ n'ont aucun élément en commun sauf leurs extrémités. Ils forment ensemble une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée qui sépare les éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ l'un de l'autre. Cela démontre la proposition *(G)*.

On peut démontrer de la même façon, en tenant compte des propositions *(D)*, *(E)* et *(F)* la proposition suivante:

Si $\mathfrak{L}$ est une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée et si $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ sont deux éléments quelconques intérieurs à $\mathfrak{L}$ ou sur $\mathfrak{L}$, il y a un $\mathfrak{P}$-arc simple intérieur à $\mathfrak{L}$, sauf ses extrémités, qui sépare les éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ l'un de l'autre à l'intérieur de $\mathfrak{L}$.

6°. Nous déterminons maintenant une suite d'éléments $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \ldots$ telle que les n_k premiers éléments soient ε_k-denses sur S ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots \to 0$, et $n_1 < n_2 < \ldots$). Cela veut dire que chaque surface circulaire sur la sphère S dont le diamètre est supérieur à ε_k, contient un point, au moins, appartenant à quelqu'un des éléments $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{n_k}$. Pour ce but, nous considérons une suite de triangulations successives de la sphère que nous désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ telles que chaque triangle de ζ_k soit de diamètre inférieur à $\varepsilon_k/2$; ensuite nous choisissons dans chaque triangle de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ un point et nous ordonnons ces points en une suite P_1, $P_2, \ldots$ où les points pris des triangles de ζ_{i+1} succèdent aux points pris des triangles de ζ_i. Nous écrivons les éléments $\mathfrak{P}$ auxquels appartiennent les points $P_1, P_2, \ldots$ dans le même ordre, seulement nous omettons les éléments qui sont identiques à des éléments antécédents.

Autour de chaque élément $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n_1$), nous considérons une *couronne* formé des éléments $\mathfrak{P}$ pour lesquels l'écart $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_i)$ est entre ε_1 et $2\varepsilon_1$. Dans chacune de ces couronnes, nous construisons en nous servant de la proposition *(G)* une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée $\mathfrak{L}_i^{(1)}$ qui sépare les deux frontières de la couronne. Nous pouvons supposer que deux quelconques parmi les courbes $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}$ n'ont qu'un nombre fini d'éléments communs tels dont le voisinage contient d'éléments appartenants à l'une des deux courbes sans appartenir à l'autre. (Par exemple, la courbe $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ n'a qu'un nombre fini d'arcs dont les extrémités appartiennent à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et qui ont des points extérieurs à la couronne de $\mathfrak{P}_1$; nous gardons ces arcs de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ et nous remplaçons les autres par des arcs correspondants de $\mathfrak{L}_1^{(1)}$; etc.) Soit $\mathfrak{D}_i^{(1)}$ le $\mathfrak{P}$-domaine fermé consistant en l'intérieur de $\mathfrak{L}_i^{(1)}$ et sa frontière (c'est donc le domaine déterminé par $\mathfrak{L}_i^{(1)}$ contenant $\mathfrak{P}_i$ et la courbe même). Chaque élément de $\mathfrak{D}_i^{(1)}$ a de $\mathfrak{P}_i$ un écart inférieur à $2\varepsilon_1$ et chaque élément $\mathfrak{P}$ dont l'écart de $\mathfrak{P}_i$ est inférieur à ε_1 appartient à $\mathfrak{D}_i^{(1)}$; nous appelons $\mathfrak{P}_i$ *centre* du domaine $\mathfrak{D}_i^{(1)}$. Tout élément $\mathfrak{P}$ appartient à un, au moins, des $\mathfrak{P}$-domaines $\mathfrak{D}_1^{(1)}$, $\mathfrak{D}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{D}_n^{(1)}$. De la même façon, nous construisons les $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_1^{(k)}, \mathfrak{L}_2^{(k)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_k}^{(k)}$ pour chaque k et supposons que toutes les courbes $\mathfrak{L}_r^{(s)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n_s;\ s = 1, 2, \ldots, k)$ n'aient deux à deux qu'un nombre fini de points communs. Nous désignons par $\mathfrak{D}_r^{(s)}$ le domaine fermé déterminé par $\mathfrak{L}_r^{(s)}$ contenant l'élément $\mathfrak{P}_r$.

Si $\mathfrak{P}$ est un élément appartenant aux domaines fermés $\mathfrak{D}_{r_1}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_{r_2}^{(2)}, \ldots$ les écarts de $\mathfrak{P}$ des centres $\mathfrak{P}_{r_1}, \mathfrak{P}_{r_2}, \ldots$ de ces domaines tendent vers zéro; en effet, l'écart d'un élément quelconque de $\mathfrak{D}_{r_k}^{(k)}$ du centre $\mathfrak{P}_{r_k}$ est inférieur à $2\varepsilon_k$. De là il s'ensuit que deux éléments différents $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ ne peuvent appartenir à tous les domaines de la suite.

Les $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}$ déterminent un nombre fini de $\mathfrak{P}$-domaines $\mathfrak{d}_1^{(1)}, \mathfrak{d}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{d}_{m_1}^{(1)}$ sur la sphère S. Sur une autre sphère S', nous pouvons construire un réseau polygonale isotope à ce réseau (dans le sens combinatoire). Soit, en effet, $\pi_1^{(1)}$ un polygone sur S'; la $\mathfrak{P}$-courbe $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ consiste d'un nombre fini de $\mathfrak{P}$-arcs dont les extrémités appartiennent à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et qui n'ont d'autres points sur $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ ou qui sont identiques avec des arcs de $\mathfrak{L}_1^{(1)}$. Nous transformons la $\mathfrak{P}$-courbe $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ topologiquement en le polygone $\pi_1^{(1)}$; aux éléments communs à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ correspondent par cette transformation un nombre fini de lignes et un nombre fini d'autres points de $\pi_1^{(1)}$. Si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont deux éléments communs à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ qui sont joints par un arc de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ ne contenant aucun autre élément de $\mathfrak{L}_1^{(1)}$, nous joignons les deux points correspondants de $\pi_1^{(1)}$ par une ligne polygonale sur S' passant à l'intérieur ou à l'extérieur de $\pi_1^{(1)}$ suivant que l'arc correspondant de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ soit intérieur ou extérieur à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$. Ensuite, nous établissons entre cette ligne polygonale et entre l'arc correspondant de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ une homéomorphie. En continuant ainsi, nous obtenons un réseau polygonale sur S', formé par les polygones $\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \ldots, \pi_{n_1}^{(1)}$, isotope au réseau sur S formé par $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}$, et une homéomorphie entre les éléments du réseau sur S et les points de l'autre.

Nous considérons alors les $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_1^{(2)}, \mathfrak{L}_2^{(2)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_2}^{(2)}$ et la subdivision des domaines $\mathfrak{d}_1^{(1)}, \mathfrak{d}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{d}_{m_1}^{(1)}$ par ces courbes en les domaines $\mathfrak{d}_1^{(2)}, \mathfrak{d}_2^{(2)}, \ldots, \mathfrak{d}_{m_2}^{(2)}$. Nous déterminons les polygones $\pi_1^{(2)}$, $\pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_{n_2}^{(2)}$ sur S' de telle façon que le réseau formé par $\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}, \ldots, \pi_{n_1}^{(1)}, \pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_{n_2}^{(2)}$ sur S' soit isotope au réseau formé par $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}, \mathfrak{L}_1^{(2)}, \mathfrak{L}_2^{(2)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_2}^{(2)}$ sur S. La continuation de ces opérations est claire. On peut constuire les polygones $\pi_r^{(s)}$ de telle façon que leurs diamètres tendent vers zéro lorsque s croît indéfiniment, ce que nous supposons dans la suite.

L'homéomorphie que nous établissons successivement entre les points des polygones $\pi_r^{(s)}$ et les éléments des $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_r^{(s)}$ s'étend aux sphères S' et S toutes entières. En effet, à chaque suite monotone de domaines fermés $\mathfrak{d}_{r_1}^{(1)}, \mathfrak{d}_{r_2}^{(2)}, \ldots$ (dont chacun contient le suivant), correspond un élément $\mathfrak{P}$ et un seul contenu dans tous les domaines de la suite et inversement à chaque élément $\mathfrak{P}$ correspond une suite monotone de domaines de cette sorte. D'autre part, à chaque suite monotone de domaines correspond sur S' une suite monotone de domaines déterminé par les polygones $\pi_r^{(s)}$ qui tend vers un seul point P. En faisant correspondre l'élément $\mathfrak{P}$ déterminé par une suite monotone de domaines $\mathfrak{d}_r^{(s)}$ le point P de S' déterminé par la suite correspondante de domaines sur S', nous obtenons donc une correspondance biunivoque et bicontinue entre les éléments $\mathfrak{P}$ de S et entre les points P de S'.

Par cela, nous avons démontré la proposition énoncé au début de IV. 1°, ce que nous voulons encore formuler en une forme indépendante de la terminologie du texte:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface continue (image univoque et continue d'une sphère) définie par les fonctions

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v), \ldots, z = h(u, v)$$

puisse être représentée par des fonctions

$$x = F(u, v),\ y = G(u, v), \ldots, z = H(u, v)$$

qui ne sont simultanément constantes sur aucun vrai continu de la sphère, est ce que chaque continu sur lequel les fonctions $f, g, \ldots, h$ sont simultanément constantes et qui n'est pas sous-ensemble d'un continu ayant la même propriété, ait pour ensemble complémentaire sur la sphère un seul domaine.

(Reçu le 27 octobre 1927)

Bibliographie.

G. Misch, Der Weg in die Philosophie, VII + 418 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1926.

Gar mancher Mathematiker wird in seinen „mathematischen Mussestunden" nicht das bekannte treffliche Werk, das AHRENS unter diesem Titel herausgab, aufschlagen, sondern das Verlangen empfinden, die Klassiker der Philosophie anzuhören. Zu diesem Zweck ist das vorliegende prächtige Werk jedem Mathematiker wärmstens zu empfehlen, wenn er nicht nur lesen, sondern auch *mitarbeiten* will. Namentlich wird ihn der letzte Teil über die Begründung der Naturwissenschaft bei den Griechen interessieren; er findet hier eine „Anthologie" aus den grossen griechischen Denkern, und gar manche Stellen werden ihn ergreifen. Dennoch ist das Buch nicht als eine blosse „Auslese" zu betrachten, da man überall den Geist des Verfassers empfindet, obwohl er seine eigenen Erläuterungen oft zurücktreten lässt.

A. H.

O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, 45 S. in 4^0 und 6 Tafeln, Berlin, J. Springer, 1926.

Das erste Kapitel der Schrift behandelt die begrifflichen Grundlagen der ägyptischen Mathematik, das zweite Kapitel erbringt die Aufklärung der ägyptischen Bruchrechnung, insbesondere die der Stammbruch-Zerlegung, mit der sich der erste Teil des Papyrus Rhind bescheftigt.

Eine Erkenntnis, die ein Mathematiker — ohne spezielles historisches Gefühl — aus der sehr gründlichen Darstellung schöpfen kann, ist dass das Primitivste nicht immer das Einfachste ist.

B. von Kerékjártó.

H. Falckenberg, Elementare Reihenlehre (Sammlung Göschen Nr. 943), 136 S., Berlin u. Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1926.

Nach einleitenden Abschnitten über reelle Zahlen und über endliche Reihen (binomischer und polynomischer Lehrsatz, arithmetische Reihen erster und höherer Ordnung, geometrische Reihe) wird die Theorie der unendlichen Reihen recht ausführlich behandelt und auf einige wichtige Beispiele angewandt. Die Darstellung ist, dem Titel entsprechend, möglichst elementar; die Elemente der Differential- und Integralrechnung werden nur an einigen Stellen gebraucht, um rascher das Ziel zu erreichen.

Die irrationalen Zahlen werden durch DEDEKINDsche Schnitte definiert; an dem Beispiele der Addition wird angedeutet, wie auf Grund dieser Definition die Rechenoperationen zu erklären sind. Der binomische Lehrsatz wird durch Ausrechnen des Produktes $(1+a_1)\ldots(1+a_n)$, der polynomische Lehrsatz hingegen direkt durch eine kombinatorische Betrachtung abgeleitet. Nach Herleitung einiger Formeln für höhere arithmetische Reihen folgt die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe, als Vorbereitung zur Theorie der unendlichen Reihen. Es folgen die wichtigsten Definitionen und

Sätze über Zahlenfolgen, durch das Beispiel der wichtigen Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ beleuchtet; alsdann die Definitionen über unendliche Reihen, sowie das allgemeine Konvergenzkriterium. Das Kapitel über Reihen mit positiven Gliedern ist ziemlich ausführlich; nach allgemeinen Sätzen über Teilreihen, Umordnung usw. behandelt der Verfasser die Vergleichungskriterien, die CAUCHYschen Kriterien, das RAABEsche, das logarithmische und das GAUSSsche Kriterium der Konvergenz und Divergenz. Aus den Sätzen über Reihen mit positiven Gliedern ergeben sich nun im nächsten Kapitel die Sätze über absolut konvergente Reihen sehr leicht; es wird auch der Satz über die Multiplikation einer konvergenten Reihe mit einer absolut konvergenten bewiesen.

Als Anwendung folgt nun die Bestimmung des Konvergenzbereiches der Potenzreihen, der Identitätssatz und die Differentiation der Potenzreihen. In den letzten Kapiteln werden einige wichtige Potenzreihen: die binomische, hypergeometrische, exponentielle, Kosinus-, Sinus- und Tangensreihe, die logarithmischen und zyklometrischen Reihen behandelt. Die Identifizierung der Summen der Reihen mit den betreffenden elementaren Funktionen erfolgt zum Teil durch den Nachweis, dass die Summen der Reihen Funktionalgleichungen genügen, die die betreffenden elementaren Funktionen charaktisieren, zum Teil aber durch Berufung auf den Identitäts-, Differentiations-, bzw. Multiplikationssatz der Potenzreihen. Es ist Schade, dass bei der Identifizierung der Sinus- bzw. Kosinusfunktion mit der Summe der Sinus- bzw. Kosinusreihe der Verfasser den sehr lehrreichen elementaren Beweis durch eine unnötige Heranziehung der Integralrechnung zu Ende führt.

Das Buch wird hoffentlich jedem, der eine erste Orientierung in der Reihenlehre erlangen will, vom Nutzen sein.

L. Kalmár.

Hk. de Vries, Die vierte Dimension, deutsch von R. STRUIK (Wissenschaft und Hypothese XXIX), IX + 176 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1926.

Das vorliegende Buch des bekannten holländischen Gelehrten hat den Zweck, eine allgemeine Einführung in die Gedankenwelt dem mehrdimensionalen und der nicht-euklidischen Geometrien zu geben, die den angehenden Mathematikern zur ersten Orientierung und den Studenten der modernen Physik zur Aneignung der wichtigsten Ideen und Resultate dieser Theorien dienen soll. Dem Verfasser ist es gelungen, diesen Zweck vollständig dadurch zu erreichen, dass er die mehrdimensionalen und die nicht-euklidischen Geometrien ohne Formeln und nur durch innere Klärung und Auseinandersetzung der Grundbegriffe behandelt. — Der erste Teil behandelt die euklidische mehrdimensionale Geometrie; neben dem didaktischen Gesichtspunkt wird auch dem historischen genügend Rechnung getragen. Der Grundgedanke seiner Behandlung ist, die zwischen der zwei- und der dreidimensionalen Geometrie bestehenden Beziehungen dermassen auseinanderzusetzen und auf ihre wesentlichen Elemente zurückzuführen, dass dieselben Beziehungen den Übergang von drei auf vier Dimensionen ermöglichen. Dieses Prinzip ist freilich nicht neu — es spielt schon in den populären Vorlesungen von POINCARÉ eine vorzügliche Rolle — es wird aber in der musterhaften Behandlung von HK. DE VRIES so konsequent durchgeführt, dass man dadurch eine wahrhafte *Anschauung* im vierdimensionalen Raum erhält. Der in diesem Teil gegebene Stoff ist reichhaltig, umfasst sozusagen alle wesentlichen Resultate; er erbringt für vier Dimensionen auch die Aufzählung der regelmässigen Polytope. — Der zweite Teil behandelt die nich-euklidischen ebenen Geometrien wieder auf eine Weise, die die didaktische und die geschichtliche Entwicklung vor Augen hält. Die Betrachtung ist auch hier gut gelungen und der dargestellte Stoff sehr vollständig.

Als besonderen Vorteil des Werkes möchte ich den schon oben erwähnten Umstand hervorheben, dass die Geometrie auf eine durchaus anschauliche Weise — ohne den komplizierten Apparat des Mathematikers — dargestellt wird, wodurch das Buch auch für solche, die das Gebiet schon kennen, eine sehr instruktive und immer interessante Lektüre bietet.

B. von Kerékjártó.

L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II: Moderne Funktionentheorie, VII + 366 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Sechs Jahre nach dem Erscheinen des ersten Bandes liegt nunmehr erfreulicherweise auch der zweite Band des BIEBERBACHschen Werkes vor. Nachdem im ersten Bande die Fundamente gelegt und die klassischen Gegenstände der Theorie erledigt wurden, gelangen im zweiten Bande die Ergebnisse der neueren und neuesten Forschung zur Darstellung. Beispielsweise findet man in beiden Bänden je einen Abschnitt über analytische Fortsetzung; im ersten Bande handelt es sich um die grundlegenden Begriffsbildungen (analytisches Gebilde) und um klassische Sätze (Spiegelungsprinzip und Folgerungen) — der entsprechende Abschnitt im zweiten Bande bringt die neueren, überraschend schönen Sätze vorwiegend potenzreihentheoretischen Charakters. Dabei werden die Entwicklungen bis zu den neuesten Forschungsergebnissen geführt (Sätze von PÓLYA und CARLSON über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Satz von SZEGŐ über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten u. s. w.); auch bei der Darstellung von älteren Resultaten werden die durch die neuesten Forschungen ermöglichten Vereinfachungen technischer und prinzipieller Art berücksichtigt (OSTROWSKIscher Beweis des HADAMARDschen Lückensatzes). Ähnlich verhält es sich mit all den acht Abschnitten, in welche Herr BIEBERBACH den reichen Inhalt des vorliegenden Bandes gegliedert hat (Konforme Abbildung — Die elliptische Modulfunktion — Beschränkte Funktionen — Uniformisierung — Der PICARDsche Satz — Ganze Funktionen — Analytische Fortsetzung — Die RIEMANNsche Zetafunktion). Überall findet man, dass nach gründlicher Vorbereitung im ersten Bande der Lernende nunmehr in unmittelbare Fühlung mit der lebendigen Wissenschaft gesetzt wird; er lernt dabei nicht nur eine Fülle der modernsten Ergebnisse kennen, er lernt auch die Handhabung der weittragendsten und zugleich einfachsten Methoden.

Beim ausserordentlichen Reichtum der komplexen Funktionentheorie an

Ergebnissen, Problemen, Methoden und Anwendungen konnte der Verfasser begreiflicherweise nicht nach Vollständigkeit streben. Was er in seinem Werke bietet, geht trotzdem ganz wesentlich über die gewohnten Rahmen hinaus, und zwar nicht nur der Breite, sondern auch der Tiefe nach, wie bereits aus den obigen Bemerkungen über den die analytische Fortsetzung behandelnden Abschnitt zu ersehen ist. Es ist nicht möglich, hier über den Reichtum des behandelten Stoffes und über die unzähligen Feinheiten in den Einzelheiten der Darstellung auch nur annähernd eine Idee zu geben; überdies besitzt das Buch einen Vorzug, der eben nur beim Studium desselben hervortritt, nämlich die lebhafte, stets fesselnde, leicht fliessende und trotzdem im Grossen und im Kleinen fein durchdachte Darstellung. Kurz: ein schönes Buch, welches die beiden, im Titel und Untertitel desselben steckenden Versprechen, ein *Lehrbuch* und zugleich *modern* zu sein, in glücklichster Weise einlöst. Es werde noch bemerkt, dass das Buch auch dem Kenner viel Neues und Interessantes bringt, und zwar nicht nur an Feinheiten im Kleinen und an Originalität der Einstellungen im Grossen; in der Tat enthält das Buch, zerstreut auf fast alle Abschnitte desselben, eine Reihe von bedeutenden, bisher unveröffentlichten persönlichen Beiträgen des Verfassers.

In einem Buche von derart reichem und mannigfaltigem Inhalte gibt es natürlich auch Stellen, wo man mit dem vom Verfasser eingeschlagenen Wege nicht ganz einverstanden sein oder wo man eine schärfere Fassung der Begriffe und der Ausdrucksweise wünschen wird. Beispielsweise scheint dem Referenten die Behandlung der topologischen Fragen in den Abschnitten über konforme Abbildung und Uniformisierung nicht diejenige Einfachheit und Übersichtlichkeit darzubieten, die man mit Rücksicht auf die gegenwärtige hohe Entwicklung der Topologie erwarten würde. Ferner hat Referent den Eindruck, dass ein auf dem Begriffe der universellen Überlagerungsfläche beruhender, die funktionentheoretischen Methoden von Koebe, Bieberbach, Carathéodory mit den topologischen Methoden von Weyl zweckmässig vereinigender Beweisgang zu einer einfacheren Herleitung des Hauptsatzes der Uniformisierungstheorie führen könnte, wie die Bieberbachsche *Methode der schrittweisen Uniformisierung*. Es handelt sich hier aber offenbar um Dinge, bei deren Beurteilung die subjektive Einstellung massgebend ist.

Tibor Radó.

Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic, translated by Martin Luther D'Ooge, with studies in greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski (University of Michigan Studies, Humanistical Series vol. XVI.), 318 p. in 4⁰, New York, The Macmillan Co., 1926.

The text of Nicomachus on arithmetic has a very interesting content not only from historical but also from mathematical point of view. The additional studies of the editors and the careful notes bring it up to date and make it easy to understand. The whole book is very interesting to read and very valuable for the purpose to obtain a wide knowledge on greek arithmetic.

B. de Kerékjártó.

Charles Jordan, Statistique mathématique, avec une préface de M. d'Ocagne. VIII + 344 pages, Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1927.

Ce livre excellent est écrit à l'usage du statisticien qui désire tirer des chiffres tous les renseignements qu'ils comportent. L'auteur qui professe ce sujet à la *Faculté d'Économie Politique de l'Université de Budapest,* fait précéder l'exposé des méthodes mathématiques de la Statistique par celui des notions et résultats indispensables de Calcul des différences finies, d'Analyse, de Calcul des probabilités, d'Interpolation et de Calcul numérique. Pour citer un exemple parmi les contributions personnelles de l'auteur, mentionnons les polynomes G propres au développement des fonctions qui ne sont définies que pour des valeurs isolées (mais équidistantes) de la variable. Ces polynomes s'obtiennent par dérivations successives en partant de la fonction $\frac{x^\nu e^{-x}}{\nu!}$; leurs avantages tiennent à certaines relations d'orthogonalité où interviennent non pas des intégrales mais des sommes.

Une foule de détails et de points de vue nouveaux frappent l'attention du lecteur qui regrette en maints endroits que l'auteur ait cru devoir se borner à l'indication des formules au lieu d'insister sur leur enchaînement (par exemple, pour les polynomes introduits sous le nom de „polynomes de Bernoulli de seconde espèce," pour la formule sommatoire de Maclaurin-Euler dont il avait donné la démonstration la plus naturelle, etc.). Mais peut-être cette concision lui était-elle imposée par la richesse des matières qu'il a su condenser dans un volume de 344 pages, consacré surtout aux notions et méthodes de la Statistique mathématique proprement dite (classifications, moyennes, représentation et ajustement des fonctions de fréquence, principes des moments et des moindres carrés, corrélation). Il use franchement du calcul des probabilités et soumet à un examen critique les méthodes pratiquées par les statisticiens. Il compare notamment les applications du principe des moments et du principe des moindres carrés (sans dissimuler ses péférences pour ce dernier) et expose en détail les méthodes de Kapteyn, de Pearson, de Sheppard, ainsi qu'une méthode nouvelle d'ajustement.

L'ouvrage contient un grand nombre d'exemples numériques qui montrent chez l'auteur une heureuse alliance de l'intérêt théorique et des préoccupations pratiques.

Adolphe Szücs.

J. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsche Ausgabe von Dr. F. M. Urban (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Trefftz), IX + 212 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Wirft man einen Blick auf die Lehrbücher-Literatur der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so kann man darin in scharfer Weise zwei Kategorien unterscheiden. Die eine Kategorie stellt sich zur Aufgabe, die Wahrscheinlichkeitsrechnung an Anwendungen und geschickt gewählten Aufgaben zu erläutern; die mathematischen Theoreme dieser Disziplin werden daher rasch erledigt, wobei oft auf die mathematische Strenge verzichtet wird, um eine möglichst grosse Anzahl von Anwendungen darlegen zu können. Die zweite Kategorie der Lehrbücher — ich nenne die Werke von MARKOFF und CASTELNUOVO — legen gerade auf die der Theorie zu Grunde liegenden mathematischen Theoreme das Hauptgewicht; sie sind in erster Reihe für den Mathematiker geschrieben, wobei den Anwendungen tatsächlich nur die Rolle von Beispielen zur allgemeinen Theorie zukommt.

Das vorliegende Büchlein gehört zur ersten Kategorie; sie verwirklicht aber ihr Ziel in ausgezeichneter Weise. Durch elementare und jedem Studenten der Mathematik zugängliche Behandlungsweise des Stoffes (selbst die STIRLINGsche Formel wird nicht als bekannt vorausgesetzt), durch die glücklich getroffene Auswahl der Anwendungen (es wird neben den üblichen Anwendungen auch die kinetische Gastheorie und die Lebensversicherung behandelt), endlich durch den verhältnissmässig kleinen Umfang des Buches erreicht der Verfasser, dass sein Werk zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung besonders geeignet wird und ohne Zweifel viel dazu beitragen wird, die Kenntnis dieser Disziplin in weiten Kreisen zu verbreiten.

A. H.

A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre (Wissenschaft und Hypothese XXXI), X + 182 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Das neue Buch FRAENKELS zeichnet sich durch dieselben Vorzüge aus, die wir in der Besprechung (im Bd. 2 *dieser Acta*) seiner *Einleitung in die Mengenlehre* gerühmt haben. Diese sind u. A.: die klare, leichtverständliche Sprache und die Unvoreingenommenheit, mit der die verschiedenen, oft einander widersprechenden neuen Theorien dargestellt werden.

Im neuen Buch erscheint natürlich das CANTORsche Tatsachenmaterial in einer sehr gedrängten Auswahl um gleich am Anfang zu den Antinomien und ihren Wirkungen übergehen zu können.

Der Tatsache entsprechend, dass man die nicht-praedikativen Begriffsbildungen ablehnen kann, ohne deshalb Intuitionist zu sein (dieser Ansicht hat sich jetzt Verf. angeschlossen), wird uerst dieser RUSSELL-POINCARÉscher Standpunkt erläutert und hierauf erst werden die wesentlichen Punkte des BROUWERschen Intuitionismus behandelt: Ablehnung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten und, in Zusammenhang hiermit, Verbot der schrankenlosen Verwendung der Begriffe „alle" und „es gibt." (Es ist wohl nur ein sprachlicher Irrtum, wenn Verf. auf S. 40. dem deutschen „es gibt" das englische „any" entsprechen lässt).

Zwei Drittel des Buches behandeln, auf der ZERMELOschen Grundlegung basierend, die Axiomatisierung der Mengenlehre. Dies entspricht der festen Überzeugung des Verfassers, dass dies die einzige Methode zur Lösung der behandelten Probleme darstellt. Dabei werden auch manche Einwände erwähnt — wenn auch nicht voll berücksichtigt —, welche die grenzenlose Anwendbarkeit der axiomatischen Methode illusorisch zu machen scheinen. Von diesen

Einwänden wollen wir besonders auf das merkwürdige Resultat von Skolem hinweisen, laut welchem „der Begriff der Mächtigkeit beim axiomatischen Vorgehen notwendig relativiert wird."

Am ausführlichsten behandelt Verf. das Aussonderungs- und das Auswahlaxiom. Es is zu bedauern, dass er ersteres (Axiom V') nicht einfacher aussprechen und von seiner (wenigstens scheinbar) zirkelhaften Formulierung befreien vermochte.

Bei der Frage der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems kommt Verf. dazu, von den neuen Untersuchungen Hilberts zu sprechen. Er stellt die Frage, ob das Hilbertsche Unternehmen — der Widerspruchslosigkeitsbeweis für die Mathematik — „seiner Natur nach überhaupt durchführbar ist?"

Das Buch schliesst mit der Untersuchung der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. Hier wird die berühmte unendliche Menge der Strumpfpaaren herangezogen. (Dieses pittoreske Beispiel stammt jedoch nicht von Poincaré, wie auf S. 86 behauptet wird, sondern von Russell).

Jeder, der sich damit nicht zufrieden stellt, die Berechtigung einer mathematischen Untersuchung nur durch sein aesthetisches Gefühl oder vom Standpunkte der Anwendbarkeit beurteilen zu können, wird dem Verfasser dankbar sein, diese brennendsten Probleme der Wissenschaft in klarer Weise besprochen und hierdurch auch der Lösung gewiss näher gebracht zu haben.

Dénes König.

Reprinted by arrangement with the publishers
„KULTURA" Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
Budapest, POB. 149.
Hungary

Kossuth Nyomda